Bollettino
Unione Matematica Italiana

Maria Tortorici

Sulle trasformazioni asintotiche delle curve.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 22–27.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_22_0>

Sulle trasformazioni asintotiche delle curve.

Nota di MARIA TORTORICI (a Palermo).

Sunto: *Si espone qualche semplice osservazione sulle formule relative alle trasformazioni asintotiche delle curve e si deducono, in modo più breve, alcuni risultati di* BIANCHI *e di* PICONE ([1]).

1. Sia (C) una curva luogo del punto $P(x, y, z)$ e le coordinate di P siano date in funzione dell'arco u della curva stessa. Si denoterà con (C_1) un' altra curva luogo del punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$, essendo le coordinate di P_1 anche esse funzioni di u. Con le abituali notazioni della teoria delle curve, si distingueranno con l'indice 1 gli elementi relativi a (C_1), della quale, in particolare, u_1, $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{T_1}$ denoteranno l'arco, la flessione e la torsione.

Fra le curve (C), (C_1) sia posta la corrispondenza puntuale biunivoca nella quale siano corrispondenti i punti P, P_1, determinati dallo stesso valore di u. Denoti, inoltre, t_1 la lunghezza del segmento PP_1, σ_1 l'angolo dei piani osculatori alle due curve nei punti detti e Θ l'angolo che, nel piano osculatore a (C) in P, la retta orientata $\overrightarrow{PP}_1$, di coseni direttori l, m, n fa con la tangente a (C) nello stesso punto. Ponendo:

$$x_1 = x + t_1 l, \qquad (l = \alpha \cos \Theta + \varsigma \operatorname{sen} \Theta) \tag{1}$$

$$\lambda_1 = \lambda \cos \sigma_1 + (\xi \cos \Theta - \alpha \operatorname{sen} \Theta) \operatorname{sen} \sigma_1, \tag{2}$$

e le analoghe per y_1, z_1, è ben noto che (C) e (C_1) sono asintotiche sulla rigata R luogo delle congiungenti i loro punti corrispondenti se e solo quando le tre funzioni t_1, σ_1, Θ verificano il sistema:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} 1) & \dfrac{1}{\operatorname{sen} \Theta}\left(\dfrac{d\Theta}{du} + \dfrac{1}{\rho}\right) = \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{\cot \sigma_1}{T} \\[2ex] 2) & \dfrac{d \cot \sigma_1}{du} + \dfrac{T}{t_1^2}\dfrac{dt_1}{du} = \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma_1} - \dfrac{T^2}{t_1^2}\right)\dfrac{\cos \Theta}{T}. \end{array} \right.$$

([1]) Cfr. L. BIANCHI: *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXV - 1° semestre 1908); M. PICONE: *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria « Sulle congruenze rettilinee W »* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». t. XXXIX - 1° semestre 1915).

Dalle (1) e da (I), denotando con Θ_1 l'angolo che la generatrice $\overrightarrow{PP_1}$ fa con la tangente a (C_1) in P_1, seguono le formule:

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{du_1}{du}\right)^2 = \left(\frac{dt_1}{du} + \cos\Theta\right)^2 + \left(\frac{t_1 \operatorname{sen}\Theta}{T \operatorname{sen}\sigma_1}\right)^2,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{du_1}{du}\cos\Theta_1 = \frac{dt_1}{du} + \cos\Theta$$

e si ritrova pure direttamente la notissima relazione di BIANCHI:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{TT_1} = \frac{\operatorname{sen}^2\sigma_1}{t_1^2}.$$

2. Osservando che la relazione fra (C) e (C_1) di essere legate da una trasformazione asintotica è simmetrica, è chiaro che, con le precedenti relazioni, devono sussistere pure le altre che si ottengono operando su esse la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} u, & \Theta, & t_1, & \sigma_1, & \frac{1}{T}, & \frac{1}{\rho} \\ u_1, & \Theta_1, & -t_1 & -\sigma_1 & \frac{1}{T_1}, & \frac{1}{\rho_1} \end{pmatrix}.$$

Con ciò la (IV) resta in sè stessa, mentre il sistema (I) diviene:

$$\text{(I*)} \quad \begin{cases} 1) \quad \dfrac{1}{\operatorname{sen}\Theta_1}\left(\dfrac{d\Theta_1}{du_1} + \dfrac{1}{\rho_1}\right) = -\left(\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{\cot\sigma_1}{T_1}\right) \\ 2) \quad -\left(\dfrac{d\cot\sigma_1}{du_1} + \dfrac{T_1}{t_1^2}\dfrac{dt_1}{du_1}\right) = \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma_1} - \dfrac{T_1^2}{t_1^2}\right)\dfrac{\cos\Theta_1}{T_1}. \end{cases}$$

Sommando membro a membro (I), 1) e (I*), 1) si ottiene la relazione:

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(\frac{d\Theta}{du} + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta_1}\left(\frac{d\Theta_1}{du_1} + \frac{1}{\rho_1}\right) = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)\cot\sigma_1$$

che lega le flessioni $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho_1}$ delle due curve e che torna utile in problemi particolari.

3. Considero ora qualcuno di questi problemi.

Si voglia decidere se la (C) ammette una trasformata asintotica (C_0) che sia trajettoria ortogonale delle generatrici di R. Apponendo l'indice zero agli elementi di (C_0), con le notazioni adoperate, bisogna porre: $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e le (I) e (II) dànno per le funzioni

Θ, t_0, σ_0 le tre condizioni:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(\dfrac{d\Theta}{du}+\dfrac{1}{\rho}\right)=\dfrac{1}{t_0}+\dfrac{\cot\sigma_0}{T} \\ \dfrac{d\sigma_0}{du}+\dfrac{\cos\Theta}{T}=0 \\ \dfrac{dt_0}{du}+\cos\Theta=0. \end{cases}$$

Ne risulta che il problema proposto è possibile e si ha l'arbitrarietà di tre costanti.

Volendo, di più, che la curva (C_0) sia una retta, deve imporsi la condizione $\dfrac{1}{\rho_0}=0$, ossia, per la (I*), 1):

$$t_0=-T_0\operatorname{tag}\sigma_0.$$

Per la (IV), questa può scriversi:

$$(4)\qquad t_0=-T\cos\sigma_0\operatorname{sen}\sigma_0$$

e le ultime due equazioni del sistema (3) conducono alle altre:

$$(5)\qquad \frac{1}{T}\frac{dT}{du}=-2\cot\sigma_0\frac{d\sigma_0}{du},\qquad 2T\operatorname{sen}^2\sigma_0=k$$

denotando con k una costante arbitraria positiva e supposto $T>0$.

Eliminando Θ, σ_0, t_0 fra le (3), (4), (5), si trova la relazione:

$$(k)\qquad \frac{1}{\rho}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{dT}{du}\right)^2\frac{k}{2T-k}\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{T}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{dT}{du}\right)^2\frac{k}{2T-k}\right]\left(\frac{k}{2T-k}\right)^{\frac{1}{2}}-\\ -\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{dT}{du}\left(\frac{k}{2T-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

che lega la torsione e la flessione della curva (C). Quest'ultima è condizione necessaria affinchè la trasformazione sia possibile ed è la relazione cui fa cenno il Prof. PICONE; essa è anche una condizione sufficiente affinchè la (C) sia asintotica di una conoide retta. La (4), in forza della (5), può scriversi ora:

$$(6)\qquad t_0=-\frac{1}{2}\sqrt{k}\,\sqrt{2T-k}.$$

4. Queste ultime considerazioni si riannodano alle trasformazioni B_k delle curve (cioè a quelle trasformazioni asintotiche per cui le due curve (C), (C_1) hanno torsione uguale in punti corrispondenti), che sono state trattate esaurientemente dal Prof. PICONE [2].

[2] Cfr. M. PICONE, loco cit., [1]

Notiamo che avendosi $T = T_1$, la formula (V) diviene:

$$(V^*) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(\frac{d\Theta}{du}+\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\Theta_1}\left(\frac{d\Theta_1}{du_1}+\frac{1}{\rho_1}\right)=0.$$

Se alla trasformazione B_k si impone ancora la corrispondenza per uguaglianza d'arco ($du_1 = du$), la (III) dà;

$$(7) \qquad \cos\Theta_1 = \frac{dt_1}{du} + \cos\Theta$$

e la (II) fornisce:

$$\left(\frac{dt_1}{du} + \cos\Theta\right)^2 = \cos^2\Theta,$$

quindi deve essere:

$$(8) \qquad \frac{dt_1}{du} = 0 \qquad \text{ovvero:} \qquad \frac{dt_1}{du} = -2\cos\Theta.$$

La prima di questa ipotesi porta che σ_1 e T siano costanti (si tratta cioè delle trasformazioni B_σ del BIANCHI delle curve a torsione costante) e dalla (7) si ha:

$$\cos\Theta_1 = \cos\Theta; \qquad \Theta_1 = \left\{\begin{array}{l}\Theta \\ -\Theta\end{array}\right. .$$

La (V^*), nei due sottocasi, dà ordinatamente:

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1} = -2\frac{d\Theta}{du}, \qquad \text{ovvero:}\ \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1} = -2\frac{d\Theta}{du}.$$

Nella seconda ipotesi, dalla (7) e successivamente dalla (V^*), si trae:

$$\cos\Theta_1 = -\cos\Theta; \qquad \Theta_1 = \left\{\begin{array}{l}\pi-\Theta \\ \Theta-\pi\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}=0, \qquad \text{ovvero:} \qquad \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}=0$$

ossia (C) e (C_1) sono due rette torse, ovvero sono due curve che differiscono solo per la posizione nello spazio.

Il sistema differenziale (I) per la trasformazione B_k di (C), essendo $t_1 = T\operatorname{sen}\sigma_1$, diviene:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(\dfrac{d\Theta}{du}+\dfrac{1}{\rho}\right) = \dfrac{1+\cos\sigma_1}{\operatorname{sen}\sigma_1}\cdot\dfrac{1}{T} \\[2ex] \dfrac{d\sigma_1}{du} - \dfrac{1}{T}\dfrac{dt_1}{du} = 0\end{array}\right.$$

e se in questo si pone:

$$t_1 = 2t_0, \qquad \sigma_1 = 2\sigma_0 + \pi,$$

tenendo presente la seconda delle (8), esso si trasforma nel sistema (3) e si ritrova il risultato del Prof. PICONE: la curva (C_0), luogo del punto medio del segmento PP_1, è una retta ortogonale alle generatrici di R, la quale è dunque una conoide retta.

5. In ultimo, esporrò una dimostrazione, che mi pare molto più breve di quelle già note, della proprietà che se una rigata R possiede più di due asintotiche a torsione costante, essa è l'elicoide di area minima (3).

Supposto che C, C_1, C_2 siano su una rigata R tre asintotiche curvilinee di torsione costante $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{T_2}$ rispettivamente, ponendo, secondo la formula (IV):

$$\frac{1}{TT_1} = \frac{1}{k_1^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma_1}{t_1^2}, \qquad \frac{1}{TT_2} = \frac{1}{k_2^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma_2}{t_2^2} \qquad (k_1,\ k_2 \text{ costanti})$$

può assumersi:

$$t_1 = k_1 \operatorname{sen} \sigma_1, \qquad t_2 = k_2 \operatorname{sen} \sigma_2$$

ed i sistemi (I) corrispondenti alle coppie (C, C_1), (C, C_2) sono ora:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(\frac{d\Theta}{du} + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma_1}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{\cos\sigma_1}{T}\right) \\ & \frac{d\sigma_1}{du}\left(\frac{T}{k_1}\cos\sigma_1 - 1\right) + \left(\frac{T}{k_1^2} - 1\right)\frac{\cos\Theta}{T} = 0 \end{aligned} \right.$$

e l'analogo, mutando l'indice 1 in 2. L'eliminazione di Θ fra le prime rispettive equazioni e fra le seconde, dà le due relazioni:

$$(*) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma_1}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{\cos\sigma_1}{T}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma_2}\left(\frac{1}{k_2} + \frac{\cos\sigma_2}{T}\right),$$

$$\left(1 - \frac{T}{k_2^2}\right)\frac{d}{du}\left(\sigma_1 - \frac{T}{k_1}\operatorname{sen}\sigma_1\right) = \left(1 + \frac{T}{k_1^2}\right)\frac{d}{du}\left(\sigma_2 - \frac{T}{k_2}\operatorname{sen}\sigma_2\right).$$

La prima (*) è in termini finiti, la seconda, integrando, nè dà

(3) Cfr. M. PICONE: *Ricerca delle superficie rigate provviste di asintotiche a torsione costante.* « Note e Memorie del Circolo Matematico di Catania » - Vol. I, Fasc. 3°, 1924.

un' altra, pure in termini finiti:

$$(**) \quad \left(1-\frac{T}{k_2^2}\right)\left(\sigma_1-\frac{T}{k_1}\operatorname{sen}\sigma_1\right)-\left(1-\frac{T}{k_1^2}\right)\left(\sigma_2-\frac{T}{k_2}\operatorname{sen}\sigma_2\right)+h=0,$$

h denotando una costante arbitraria.

L' eliminazione di σ_1 fra (*) e (**), conduce ad una relazione della forma:

$$F(\sigma_2,\, k_1,\, k_2,\, T,\, h)=0,$$

onde devono essere costanti σ_2 e σ_1 e allora la seconda equazione dei sistemi precedenti, dà:

$$\cos\Theta=0, \quad \Theta=\frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\rho}=\text{costante},$$

cioè la rigata R è necessariamente una elicoide d' area minima.