Bollettino
Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Sulla norma del complemento $\Gamma(\alpha, x)$ della funzione gamma incompleta per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 27–29.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_27_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sulla norma del complemento $\Gamma(\alpha, x)$ della funzione gamma incompleta per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si dimostra che la norma del complemento* $\Gamma(\alpha, x)$ *della funzione gamma incompleta per* $\alpha = -\frac{1}{2}$ *coincide, a meno di un semplice fattore, con la trasformata di* LAPLACE *di una particolare funzione di* BESSEL.

1. Il complemento $\Gamma(\alpha, x)$ della funzione gamma incompleta $\gamma(\alpha, x)$ è definito dalla

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt.$$

La $\gamma(\alpha, x)$ e il suo complemento sono pure indicate con $P(x, \alpha)$, $Q(x, \alpha)$, [o $P_x(\alpha)$, $Q_x(\alpha)$] e dette funzioni P e Q di PRYM [1].

La norma $N(\alpha, x) = \Gamma(\alpha, ix)\Gamma(\alpha, -ix)$ della funzione $\Gamma(\alpha, x)$ è stata recentemente espressa da TRICOMI [2] come trasformata di LAPLACE della somma di due funzioni ipergeometriche di GAUSS

(1) N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, Teubner, 1906.

(2) F. TRICOMI, *Una formula sulla norma della funzione gamma incompleta*, « Boll. Un Mat. Ital. », (3), 4 (1949), pp. 341-344.

a variabili complesse; e precisamente vale la formula

$$
(1)\qquad \begin{aligned} N(\alpha,\ x) = \frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\, L_x \Big[\frac{t^{-2\alpha}}{t+i} F\Big(1,\ \ 1-\alpha;\ \ 2-2\alpha;\ \ \frac{t}{t+i}\Big) + \\ + \frac{t^{-2\alpha}}{t-i} F\Big(1,\ \ 1-\alpha;\ \ 2-2\alpha;\ \ \frac{t}{t-i}\Big)\Big] \end{aligned}
$$

$$(R\alpha < 1,\quad Rx > 0),$$

con

$$L_s[F(t)] \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt.$$

Da questa sua formula, il TRICOMI deduce le note

$$(2)\qquad N(0,\ x) = L_x\left[\frac{1}{t}\log(1+t^2)\right] \qquad Rx > 0,$$

$$(3)\qquad N\left(\frac{1}{2},\ x\right) = \sqrt{2}\, L_x \{(1+t^2)(\sqrt{1+t^2}+1)]^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$(3')\qquad N\left(\frac{1}{2},\ x\right) = 4L_{2\sqrt{x}}\left[\frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\right] \qquad Rx > 0.$$

E qui aggiungo le altre

$$(4)\qquad N\left(-\frac{1}{2},\ x\right) = 2^{\frac{3}{2}} x^{-1} L_x[t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+t^2}+1)^{-\frac{3}{2}}]$$

$$(4')\qquad N\left(-\frac{1}{2},\ x\right) = 4\sqrt{2\pi}\, x^{-1} L_{2\sqrt{x}}[J_{\frac{3}{2}}(t^2)] \qquad Rx > 0,$$

che discendono dalla (1), ma non direttamente per semplice sostituzione.

2. Per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ha dalla (1)

$$N\left(-\frac{1}{2},\ x\right) = L_x\left[\frac{t}{t+i} F\left(1,\ \frac{3}{2};\ \ 3;\ \ \frac{t}{t+i}\right) + \frac{t}{t-i} F\left(1,\ \frac{3}{2};\ \ 3;\ \ \frac{t}{t-i}\right)\right]$$

Ma

$$F\left(1,\ \frac{3}{2};\ \ 3;\ \ \frac{t}{t+i}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{t}{t+i}}}{2}\right)^{-2} = $$

$$= \frac{4}{\dfrac{t+2i}{t+i} + 2\sqrt{\dfrac{i}{t+i}}},$$

per cui

$$\frac{t}{t+i} F\left(1,\ \frac{3}{2};\ \ 3;\ \ \frac{t}{t+i}\right) = \frac{4}{t}(t+2i-2\sqrt{-1+it}).$$

Analogamente

$$\frac{t}{t-i}F\left(1, \frac{3}{2};\quad 3;\quad \frac{t}{t-i}\right)=\frac{4}{t}(t-2i-2\sqrt{-1-it}).$$

E risalendo

$$N\left(-\frac{1}{2}, x\right)=4L_x\left[1-\frac{\sqrt{-1+it}+\sqrt{-1-it}}{t}\right].$$

Inoltre

$$\sqrt{-1+it}+\sqrt{-1-it}=\sqrt{2}(\sqrt{1+t^2}-1)^{\frac{1}{2}},$$

e quindi

$$N\left(-\frac{1}{2}, x\right)=4L_x[1-\sqrt{2}(\sqrt{1+t^2}+1)^{-\frac{1}{2}}].$$

Ora è noto che dalla

$$L_x[F(t)]=f(x)$$

si trae

$$L_x\left[\frac{d}{dt}F(t)\right]=xf(x)-F(0).$$

E posto

$$F(t)=1-\sqrt{2}(\sqrt{1+t^2}+1)^{-\frac{1}{2}}$$

si ha

(4) $$N\left(-\frac{1}{2}, x\right)=2^{\frac{3}{2}}x^{-1}L_x[t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+t^2}+1)^{-\frac{3}{2}}].$$

D'altra parte, per la funzione di Bessel $J_\nu(t)$ è noto che

$$L_p[J_\nu(t)]=(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+p^2}+p)^{-\nu},$$

da cui

$$2\sqrt{\pi}L_p[J_\nu(t^2)]=L_{\frac{p^2}{4}}[t^{\nu-\frac{1}{2}}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+t^2}+1)^{-\nu}].$$

Per $\nu=\frac{3}{2}$ segue

$$2\sqrt{\pi}\,L_p[J_{\frac{3}{2}}(t^2)]=L_{\frac{p^2}{4}}[t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+t^2}+1)^{-\frac{3}{2}}],$$

e per $p=2\sqrt{x}$

$$2\sqrt{\pi}L_{2\sqrt{x}}[J_{\frac{3}{2}}(t^2)]=L_x[t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+t^2}+1)^{-\frac{3}{2}}].$$

Confrontando con la (4) si conclude

(4') $$N\left(-\frac{1}{2}, x\right)=4\sqrt{2\pi}\,x^{-1}L_{2\sqrt{x}}[J_{\frac{3}{2}}(t^2)].$$