
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

J. H. C. WHITEHEAD

Omotopia.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6
(1951), n.1, p. 36–49.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_36_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_36_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

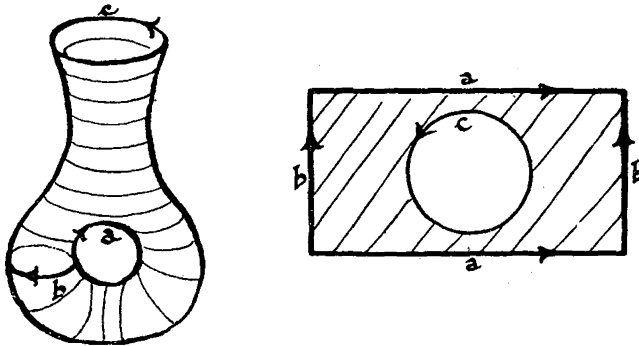
<http://www.bdim.eu/>

O m o t o p i a .

2^a Conferenza di J. H. C. WHITEHEAD (a Oxford) (*).

Sunto. - *La presente esposizione ha carattere riassuntivo, ed è corredata da un'ampia bibliografia, posta alla fine. Dalle prime nozioni sul gruppo fondamentale si passa come estensione ai vari gruppi omotopici e relativi, di cui si considerano gli operatori e le successioni omotopiche. Sono assegnati numerosi esempi illustrativi ed indicate applicazioni alla teoria degli spazi fibrati.*

1. Omotopia ed omologia. — La teoria dell'omologia sorge dall'idea di contorno. Una varietà chiusa a k dimensioni in uno spazio topologico è omologa a zero se è contorno di uno spazio subordinato a $k + 1$ dimensioni. Così la curva c in figura è omologa a zero (¹).



L'omotopia è la scienza della deformazione. La curva c non può essere deformata in modo da ridursi a un punto sulla superficie. Si può invece deformarla in una curva rappresentabile mediante il simbolo algebrico $a b a^{-1} b^{-1}$. Questo semplice esempio indica quella che è forse la differenza più significativa fra l'omologia, almeno nelle sue forme più semplici, e l'omotopia. L'omologia porta ad un'algebra commutativa; l'omotopia, invece, ad un'algebra non commutativa.

2. Tipi omotopici. — La definizione precisa di omotopia è la seguente. Siano X e Y due spazi topologici. Due rappresentazioni

(*) Per la 1^a Conferenza, cfr. questo « Bollettino », (3), 5 (1950), 156-164. Sull'argomento qui trattato, si potrà consultare con profitto la bibliografia posta alla fine.

(¹) La superficie rappresentata a sinistra si riduce a quella rappresentata a destra, quando la si tagli lungo le curve a e b .

$f_0, f_1: X \rightarrow Y$ (leggere: rappresentazioni f_0, f_1 di X su Y) si dicono omotope se, e soltanto se, esiste una famiglia di rappresentazioni $f_t: X \rightarrow Y$, definite per $0 \leq t \leq 1$ e continue nella variabile composta (x, t) , dove $x \in X$.

Scriveremo $f_0 \simeq f_1$ per indicare che f_0 è omotopa ad f_1 , e parleremo di f_t come di una deformazione di f_0 in f_1 .

Gli spazi topologici X, Y si dicono dello stesso *tipo omotopico* se, e soltanto se, esistono rappresentazioni $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ tali che $gf \simeq 1, fg \simeq 1$, dove 1 indica la rappresentazione identica di X , e così pure di Y , in sè. Assumeremo preferibilmente quest'ultima relazione, di essere cioè dello stesso tipo omotopico, come principio fondamen tale per la classificazione degli spazi topologici, piuttosto che la relazione di equivalenza topologica, che si definisce, colle precedenti notazioni, mediante le $gf = 1, fg = 1$.

Si noti che spazi dello stesso tipo omotopico possono essere assai diversi fra loro dal punto di vista della topologia intuitiva. Per esempio ogni spazio X , come p. es. uno spazio Euclideo ad n dimensioni, in cui la rappresentazione identica di X in sè sia omotopa alla rappresentazione di X su di un suo punto, è dello stesso tipo omotopico che un solo punto. Ciò nondimeno, per quanto io sappia, fatta eccezione per la dimensione e certi altri invarianti topologici, che si definiscono per mezzo della struttura locale, tutti gli invarianti topologici noti sono pure invarianti del tipo omotopico. Vale a dire sono gli stessi per due qualsiasi spazi del medesimo tipo omotopico.

3. Il gruppo fondamentale. — Il presente aspetto della teoria dell'omotopia ebbe inizio colla scoperta, dovuta a W. HUREWICZ nel 1935, dei così detti gruppi di omotopia superiori. Prima di discuterne, dirò qualcosa del gruppo fondamentale, o gruppo di POINCARÉ, di uno spazio.

Per definire il gruppo fondamentale, $\pi_1(X, x_0)$ di uno spazio X , scegliamo in primo luogo un « punto-base » fisso $x_0 \in X$. Allora un elemento di $\pi_1(X, x_0)$ è una classe di rappresentazioni $f: I \rightarrow X$, dove I indica l'intervallo $0 \leq t \leq 1$, tale che $f(0) = f(1) = x_0$. Due tali rappresentazioni, f_0, f_1 , appartengono alla stessa classe se, e soltanto se, esiste un'omotopia, $f_s: I \rightarrow X$, tale che $f_s(0) = f_s(1) = x_0$ ($0 \leq s \leq 1$). Se f, g sono rappresentazioni contenute negli elementi $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$, allora $\alpha\beta$ è l'elemento che contiene la rappresentazione, h , data da

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\alpha\beta$ dipende soltanto dagli elementi

α , β , e non dalla scelta delle f , g rappresentative di quelli. L'elemento unitario del gruppo, che possiamo indicare con 1, è l'elemento contenente la rappresentazione costante $I \rightarrow x_0$. Se $f \in \alpha$, dove α è un elemento dato di $\pi_1(X, x_0)$, allora α^{-1} è l'elemento che contiene la rappresentazione f' , data da $f'(t) = f(1 - t)$. Si verifica facilmente che $\pi_1(X, x_0)$, così definito, è un gruppo.

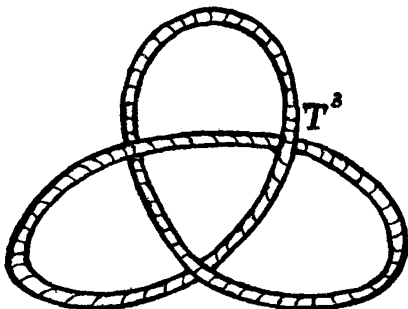
Se X è linearmente connesso, si può agevolmente trovare un isomorfismo fra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$, per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \subset X$. Pertanto, se X è linearmente connesso, scriveremo spesso $\pi_1(X)$ in luogo di $\pi_1(X, x_0)$.

Siano X ed Y spazi linearmente connessi, dello stesso tipo omotopico, e siano $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ rappresentazioni tali che $fg \simeq 1$, $gf \simeq 1$. Allora la rappresentazione f determina un isomorfismo fra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$, allorchè $y_0 = f(x_0)$. Pertanto due spazi dello stesso tipo omotopico, e quindi « a fortiori » due spazi omeomorfi, hanno i gruppi fondamentali fra loro isomorfi.

La prima applicazione di questo gruppo, che risale a POINCARÉ, è ancora fra le più interessanti. POINCARÉ aveva conchiusa una delle sue grandi Memorie sull'Analysis situs con l'ipotesi che due varietà ad n dimensioni sono omeomorfe se hanno le medesime proprietà di omologia. In una successiva Memoria, egli dimostrò che ciò non è vero, dando un esempio di varietà a 3 dimensioni che, dal punto di vista dell'omologia, non si può distinguere da una 3-sfera, mentre il suo gruppo fondamentale è il gruppo icosaedrico raddoppiato, d'ordine 120. D'altra parte il gruppo fondamentale di una 3-sfera consiste nel solo elemento unità.

Desidero ora indicare una costruzione di spazi di quella specie. Tale costruzione non è quella data da POINCARÉ, che è stata la prima applicazione del cosiddetto diagramma di HEEGAARD, ma è quella invece che fu data più tardi da DEHN. Consideriamo una curva allacciata, k , nello spazio Euclideo a 3 dimensioni, al quale sia stato aggiunto un punto all'infinito, in modo da farlo diventare una 3-sfera S^3 . Racchiudiamo k , che si potrà supporre

tanto « liscia » quanto si vuole, in un tubo T^3 sottile, quindi asportiamo T^3 da S^3 .



Ciò che rimane è una varietà a 3 dimensioni dotata di contorno, M^3 , serratura di $S^3 - T^3$, la cui frontiera è il toro T^2 , contorno di T^3 . Il primo gruppo di omologia di M^3 è un gruppo ciclico infinito, generato da un circuito meridiano, m , di T^2 . Un circuito l ,

tracciato su T^2 « per il lungo », se inoltre circonda il tubo un numero adatto di volte, forma contorno in M^2 .

Sia ora S_1^2 un altro esemplare di 3-sfera, k un qualsiasi circuito o cappio in S_1^2 , e siano T_1^2 , T_1^2 , M_1^2 , l_1 , m_1 definiti allo stesso modo che T^2 , T^2 , M^2 , l , m . Sia $\Phi: T^2 \rightarrow T_1^2$ un omeomorfismo tale che $\Phi(l) \sim rl_1 + m_1$, $\Phi(m) \sim l_1$, dove \sim significa « omologo ad », ed identifichiamo ogni punto $p \in T^2$ con $\Phi(p) \in S_1^2$. Si ottiene così da M^2 ed M_1^2 una varietà chiusa a 3 dimensioni, P^3 . Il primo gruppo di omologia di P^3 è generato dalle classi di omologia μ , μ_1 di m , m_1 , assoggettate alle relazioni $\mu = 0$, in quanto $\Phi(m) \sim l_1 \sim 0$ in M_1^2 , e $\mu_1 = 0$, poichè $m_1 \sim rl_1 + m_1 \sim \Phi(l) \sim 0$ in P^3 . Pertanto il primo gruppo di omologia di P^3 è banale (ossia si riduce all'identità), sicchè, per un teorema di dualità di POINCARÉ, anche il secondo gruppo di omologia di P^3 è banale. Se i cappi k , k_1 e l'intero r vengono scelti in modo opportuno, si può far sì che $\pi_1(P^3) \neq 1$ (in conseguenza di certe supposizioni tuttora non dimostrate, $\pi_1(P^3) \neq 1$ se k e k_1 sono entrambe auto-allacciate).

L'esempio precedente mostra la profondità della teoria dell'omotopia, sotto certi aspetti, in confronto colla teoria elementare dell'omologia. In quell'esempio il *punto cruciale* è che il primo gruppo di omologia si ottiene dal gruppo fondamentale, π_1 , rendendo commutativa la moltiplicazione. Una curva chiusa, come il circuito l di T^2 , che formi contorno ma non si possa deformare in un punto, rappresenta un elemento del gruppo dei commutatori di π_1 . La teoria elementare dell'omologia, colla sua algebra commutativa, non può, ad esempio, mostrare la differenza fra un circuito allacciato ed uno non allacciato dello spazio Euclideo.

Questa scoperta di POINCARÉ segnò l'inizio della prima fase nella teoria dell'omotopia. Quest'ultima si sviluppò soprattutto nello studio delle varietà tridimensionali e dei cappi, a prescindere dalle ricerche di NIELSEN sulle rappresentazioni delle varietà a due dimensioni su se stesse. I problemi centrali della teoria della varietà a tre dimensioni sono risultati estremamente difficili, e nessuna classificazione è stata condotta a termine. Voglio ricordare la famosa « ipotesi di POINCARÉ »: che ogni varietà tridimensionale, il cui gruppo fondamentale sia banale, è omeomorfa ad una 3-sfera. Questa congettura ha resistito a tutti i tentativi per vagliare se essa è vera o falsa.

Prima di lasciare l'argomento, osserverò che alcune delle maggiori difficoltà provengono da quella parte della teoria delle varietà tridimensionali che non riguardano l'omotopia, ma riguardano questioni di equivalenza topologica. Alcune di queste difficoltà scompaiono, se ci si occupa soltanto di tipi omotopici e non si prendono in considerazione questioni di equivalenza topologica. Ad

esempio, discende da un teorema di HUREWICZ, non difficile da intuire, che una varietà chiusa tridimensionale, il cui gruppo fondamentale sia banale, è dello stesso tipo omotopico della 3-sfera.

4. I gruppi di omotopia superiori. — I gruppi di omotopia superiori di uno spazio, X , si possono definire come segue. Sostituiamo all'intervallo I , per mezzo del quale si era definito $\pi_1(X)$, il cubo I^n ad n dimensioni, dello spazio Euclideo n -dimensionale, dato da $0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_n \leq 1$, per ogni $n \geq 1$. Scegliamo un punto base $x_0 \in X$, e passiamo a definire l' n -esimo gruppo di omotopia, $\pi_n(X, x_0)$, di X , col punto base x_0 . Un elemento $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ è: una classe di rappresentazioni $f: I^n \rightarrow X$, tali che $f(I^n) = x_0$, dove \dot{I}^n è il contorno di I^n . Due rappresentazioni $f_0, f_1: I^n \rightarrow X$ appartengono alla stessa classe se, e soltanto se, esiste una deformazione $f_t: I^n \rightarrow X$, tale che $f_t(\dot{I}^n) = x_0$, per $0 \leq t \leq 1$. L'elemento unità è rappresentato dalla rappresentazione costante. Se $f \in \alpha$, allora α^{-1} è l'elemento che contiene la rappresentazione f' , data da $f'(t_1, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$. Se $f \in \alpha, g \in \beta$, il prodotto $\alpha\beta$ è l'elemento che contiene la rappresentazione h , data da

$$h(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Si dimostra facilmente, come nel caso $n = 1$, che $\alpha\beta$ non dipende dalla scelta degli elementi rappresentativi $f \in \alpha, g \in \beta$; e così pure che $\pi_n(X, x_0)$, con detta legge per il prodotto, risulta un gruppo; inoltre, se X è linearmente connesso, ogni arco congiungente x_0 con qualsiasi altro punto $x_1 \in X$ determina un isomorfismo ben definito fra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$. In conseguenza di quest'ultima proprietà, scriveremo spesso $\pi_n(X)$ in luogo di $\pi_n(X, x_0)$.

Se $n > 1$, allora $\pi_n(X)$ risulta abeliano. Ciò può dimostrarsi come segue. Sia E^n l'interno e la frontiera di una sfera, S^{n-1} , di centro il punto a dato dalle $t_i = \frac{1}{2}$, e raggio $< \frac{1}{2}$. Se p è un punto variabile sul contorno \dot{I}_n di I^n , il segmento ap incontri S^{n-1} in q , e sia $\Theta: I^n \rightarrow E^n$ un omeomorfismo in cui ogni segmento ap è rappresentato linearmente su aq , con $\Theta(a) = a, \Theta(p) = q$. Sia $R_t: E^n \rightarrow E^n$ la rotazione data dalle

$$\begin{aligned} t_1' - \frac{1}{2} &= \left(t_1 - \frac{1}{2}\right) \cos \pi s - \left(t_2 - \frac{1}{2}\right) \sin \pi s \\ t_2' - \frac{1}{2} &= \left(t_1 - \frac{1}{2}\right) \sin \pi s + \left(t_2 - \frac{1}{2}\right) \cos \pi s \\ t_3' &= t_3, \dots, t_n' = t_n. \end{aligned}$$

Sia $\Phi: I^n \rightarrow I^n$ la rappresentazione data da $\Phi_* = \Theta^{-1}R_*\Theta$. Allora, se $h_0: I^n \rightarrow X$ è un rappresentante del prodotto $\alpha\beta$, definito sopra, si dimostra facilmente che la rappresentazione $h_1 = h_0\Phi_1$ è una delle rappresentanti di $\beta\alpha$. Ma $h_s = h_0\Theta_s$ è una deformazione di h_0 in h_1 , tale che

$$h_s(\dot{I}^n) = h_0\Phi_s(\dot{I}^n) = h_0\Theta^{-1}R_*(S^{n-1}) = h_0\Theta^{-1}(S^{n-1}) = h_0(\dot{I}^n) = x_0.$$

Pertanto $\beta\alpha = \alpha\beta$. In base a ciò, il gruppo $\pi_n(X)$ viene comunemente scritto in forma additiva, se $n > 1$.

Convienne spesso rappresentare gli elementi di $\pi_n(X)$ mediante rappresentazioni di una n -sfera, S^n , su X . Sia $p_0 \in S^n$ un punto qualsiasi di S^n e sia $\Theta: I^n \rightarrow S^n$ una rappresentazione fissata, tale che $\Theta(\dot{I}^n) = p_0$ e che Θ , ristretta ad $\dot{I}^n - I^n$, sia un omeomorfismo fra quest'ultimo ed $S^n - p_0$. Allora ad ogni rappresentazione $g: S^n \rightarrow X$, tale che $g(p_0) = x_0$, corrisponde l'elemento $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$, rappresentato dalla $g\Theta: I^n \rightarrow X$ ⁽¹⁾. Viceversa, data $f: I^n \rightarrow X$, con $f(\dot{I}^n) = x_0$, la rappresentazione $g = f\Theta^{-1}$, di S^n su X , è uniforme e continua, ed inoltre $f = g\Theta$. Quindi $\pi_n(X, x_0)$ può esser definito tanto a mezzo delle rappresentazioni $g: S^n \rightarrow X$, con $g(p_0) = x_0$, quanto a mezzo delle $f: I^n \rightarrow X$.

5. Operatori. — Il gruppo $\pi_n(X)$ può anche esser introdotto quale gruppo ad operatori di $\pi_1(X)$. Ciò è conseguenza del procedimento seguito per stabilire un isomorfismo fra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$ quando si supponga X linearmente connesso. Infatti, sia $\Theta: I \rightarrow X$ un qualunque arco congiungente $\Theta(0) = x_0$ e $\Theta(1) = x_1$; sia $f_0: I^n \rightarrow X$, con $f_0(\dot{I}^n) = x_0$, un rappresentante di un dato elemento $\alpha_0 \in \pi_n(X, x_0)$; infine, sia f_s una deformazione di quello, tale che $f_s(\dot{I}^n) = \Theta(s)$ ($0 \leq s \leq 1$). Allora f_1 rappresenta un elemento $\alpha_1 \in \pi_n(X, x_1)$. Si può dimostrare che α_1 dipende soltanto dall'elemento α_0 e dalla classe omotopica ristretta della rappresentazione $\Theta: I \rightarrow X$, due rappresentazioni Θ_0, Θ_1 appartenendo alla stessa classe se, e soltanto se, esiste una deformazione $\Theta_\lambda: I \rightarrow X$, tale che $\Theta_\lambda(0) = x_0$, $\Theta_\lambda(1) = x_1$. Inoltre la corrispondenza $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1$ è un isomorfismo fra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$. In particolare si potrà avere $x_1 = x_0$. In tal caso si vede che ogni elemento $\xi \in \pi_1(X)$, rappresentato dalla $\Theta: I \rightarrow X$, determina un automorfismo di $\pi_n(X, x_0)$.

⁽¹⁾ Vi sono due classi di tali rappresentazioni, rappresentazioni nella stessa classe essendo omotopiche, con l'immagine di \dot{I}^n tenuta fissata in p_0 . Ciascuna classe determina un orientamento di S^n , e noi descriviamo $\alpha \in \pi_n(X)$ come rappresentata da una rappresentazione, $S^n \rightarrow X$, della n -sfera orientata S^n .

Se $n = 1$ abbiamo $\alpha_0 = \xi\alpha_1\xi^{-1}$ e, in generale, conviene associare l'automorfismo $\alpha_1 \rightarrow \alpha_0$ a ξ , piuttosto che l'altro $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1$. Scriveremo $\alpha_0 = \xi\alpha_1$, ed è chiaro che $(\xi\eta)\alpha_1 = \xi(\eta\alpha_1)$. Perciò, se con T_ξ si indica l'automorfismo $\alpha \rightarrow \xi\alpha$, la rappresentazione $\xi \rightarrow T_\xi$ è un omomorfismo di $\pi_1(X, x_0)$ nel gruppo degli automorfismi di $\pi_n(X, x_0)$. Poichè, se $n > 1$, $\pi_n(X)$ è abeliano, si potrà considerare l'anello gruppendale di $\pi_1(X)$ quale anello di endomorfismi di $\pi_n(X)$. Così, se $r = n_1\xi_1 + \dots + n_p\xi_p$ è un qualsiasi elemento dell'anello gruppendale di $\pi_1(X)$, con $\xi_i \in \pi_1(X)$ e gli n_1, \dots, n_p interi, scriveremo

$$r\alpha = \sum n_i(\xi_i\alpha).$$

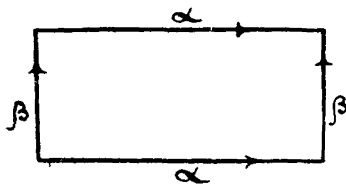
6. I prodotti $[\alpha, \beta]$. — Abbiamo visto come si possa definire un « prodotto » $\xi\alpha$, con $\xi \in \pi_1(X)$, $\alpha \in \pi_n(X)$ per $n \geq 1$. Si possono anche combinare elementi appartenenti a gruppi omotopici diversi in altro modo, facendone applicazioni significative. Sian $\alpha \in \pi_m(X)$, $\beta \in \pi_n(X)$ rappresentati dalle $f: I^m \rightarrow X$ e $g: I^n \rightarrow X$ con $f(I^m) = g(I^n) = x_0$. Posto $I^{m+n} = I^m \times I^n$, sia

$$S^{m+n-1} = \dot{I}^{m+n} = (\dot{I}^m \times \dot{I}^n) + (I^m \times \dot{I}^n)$$

e sia inoltre $h: S^{m+n-1} \rightarrow X$ la rappresentazione data dalle

$$h(p \times q) = \begin{cases} g(q) & \text{se } p \in I^m, \quad q \in \dot{I}^n \\ f(p) & \text{se } p \in \dot{I}^m, \quad q \in I^n. \end{cases}$$

Questa rappresentazione è continua, poichè $f(\dot{I}^m) = g(\dot{I}^n) = x_0$, e, preso un punto $p_0 \times q_0 \in \dot{I}^m \times \dot{I}^n$ come punto base su S^{m+n-1} , essa determina un elemento di $\pi_{m+n-1}(X)$, che indicheremo con $[\alpha, \beta]$. Se $m = n = 1$ abbiamo $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, come è indicato in figura, mentre se $m = 1$, $n \geq 2$ otteniamo



$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta = (\alpha - 1)\beta.$$

In generale si dimostra facilmente, con opportune convenzioni concernenti l'orientazione di S^{m+n-1} , che

- 1) $[\alpha, \beta]$ dipende soltanto dagli elementi α, β , e non dalla scelta delle f, g rappresentative,
- 2) $[\beta, \alpha] = (-1)^{mn}[\alpha, \beta]$, ($= [\alpha, \beta]^{-1}$ se $m = n = 1$),
- 3) se $n \geq 2$, $[\alpha, \beta_1 + \beta_2] = [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2]$ per qualsiasi elementi $\beta_1, \beta_2 \in \pi_n(X)$.

Da 3) segue che, se $n \geq 2$, allora $\beta \rightarrow [\alpha, \beta]$ è un omomorfismo di $\pi_n(X)$ su $\pi_{m+n-1}(X)$ per ogni $\alpha \in \pi_m(X)$. Inoltre dalle 2) e 3) ri-

sulta che, se $m \geq 2$, allora $\alpha \rightarrow [\alpha, \beta]$ è un omomorfismo di $\pi_m(X)$ su $\pi_{m+n-1}(X)$, per ogni $\beta \in \pi_n(X)$.

7. Esempi.

1. $\pi_n(S^n)$ è un gruppo ciclico infinito generato dall'elemento rappresentato dalla rappresentazione identica di S^n in sé.

2. Se T^2 è un toro, allora $\pi_n(T^2) = 0$ se $n > 1$. Ciò segue da un teorema generale per cui $\pi_n(X)$ è isomorfo a $\pi_n(\tilde{X})$ dove \tilde{X} è lo spazio ricoprente universale di X .

3. $\pi_3(S^2)$. - Siano $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, coordinate complesse in uno spazio Euclideo a quattro dimensioni, R^4 , e sia $S^3 \subset R^4$ data da: $\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$. Consideriamo la $S^2 \subset R^3$ data da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e sia $f: S^3 \rightarrow S^2$ la rappresentazione

$$x = \xi\bar{\eta} + \bar{\xi}\eta, \quad y = i(\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta), \quad z = \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}.$$

Questa è la ben nota rappresentazione parametrica di S^2 a mezzo delle sue generatrici complesse $\xi = \text{cost}$ ed $\eta = \text{cost}$. Se $f(\xi_0, \eta_0) = (x_0, y_0, z_0)$, si vede facilmente che $f^{-1}(x_0, y_0, z_0)$, ossia il luogo dei punti rappresentati da (x_0, y_0, z_0) , è il cerchio massimo

$$\xi = e^{i\theta}\xi_0, \quad \eta = e^{i\theta}\eta_0.$$

Due tali cerchi massimi giacciono in piani per l'origine, i quali hanno precisamente questo punto quale loro intersezione onde si vede che i due cerchi si allacciano in S^2 . Utilizzando questo fatto, HOPF dimostrò nel 1931, nonostante i gruppi superiori d'omotopia non fossero stati ancora scoperti, che l'elemento $\alpha \in \pi_3(S^2)$, dato da quella rappresentazione, è d'ordine infinito. In seguito HUREWICZ dimostrò che $\pi_3(S^2)$ è generato dall'elemento α .

4. $\pi_{m+n-1}(S^m \cup S^n) = \pi_{m+n-1}(S^m) + \pi_{m+n-1}(S^n) + [\pi_m(S^m), \pi_n(S^n)]$, dove $S^m \cup S^n$ consiste di una m -sfera e di una n -sfera con un solo punto a comune, il segno $+$ nel secondo membro indica la somma diretta dei gruppi indicati e $[\pi_m(S^m), \pi_n(S^n)]$ è il gruppo generato da tutti gli elementi α, β , con $\alpha \in \pi_m(S^m)$, $\beta \in \pi_n(S^n)$. Quest'ultimo è un gruppo ciclico libero, generato da $[\alpha, \beta]$, dove α, β sono generatori di $\pi_m(S^m)$ e $\pi_n(S^n)$. In particolare segue dunque, dall'esempio 3, che $\pi_3(S^2 \cup S^2)$ è un gruppo abeliano libero di rango 3.

5. $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) + \pi_n(Y)$, dove $X \times Y$ indica il prodotto topologico degli spazi X ed Y , e consiste di tutte le coppie (x, y) con $x \in X$, $y \in Y$. Qualsiasi rappresentazione $h_0: I^n \rightarrow X \times Y$ consiste di una coppia di rappresentazioni $f_0: I^n \rightarrow X$, $g_0: I^n \rightarrow Y$, tale che $h(p) = f_0(p) \times g_0(p)$ per ogni $p \in I^n$. Sia h_0 rappresentativa di un

elemento $\gamma \in \pi_n(X \times Y)$. Allora $h_0(p) = f_0(p) \times g_0(p) = x_0 \times y_0$ se $p \in \dot{I}^n$, dove $x_0 \times y_0 \in X \times Y$ è il punto base. Pertanto $f_0(\dot{I}^n) = x_0$, $g_0(\dot{I}^n) = y_0$. Siano $\alpha \in \pi_n(X)$ e $\beta \in \pi_n(Y)$ elementi corrispondenti alle rappresentazioni f_0 e g_0 , e siano $\alpha', \beta' \in \pi_n(X \times Y)$ gli elementi che sono rappresentati dalle $f_0', g_0': I^n \rightarrow X \times Y$, dove $f_0'(p) = f_0(p) \times Y_0$, $g_0'(p) = x_0 \times g_0(p)$. Sia h_s la deformazione di h_0 , nata da $h_s(p) = f_s(p) \times g_s(p)$, dove

$$f_s(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f_0 \mid (1+s)t_1, t_2, \dots, t_n \mid & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f_0 \mid (1-s)t_1 + s, t_2, \dots, t_n \mid & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

$$g_s(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} g_0 \mid (1-s)t_1, t_2, \dots, t_n \mid & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g_0 \mid (1+s)t_1 - s, t_2, \dots, t_n \mid & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Allora $h_s(\dot{I}^n) = x_0 \times y_0$, ed h_s è la rappresentazione data da

$$h_s(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f_0(2t_1, \dots, t_n) \times y_0 = f_0(2t_1, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ x_0 \times g_0(2t_1 - 1, \dots, t_n) = g_0'(2t_1 - 1, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Pertanto $\gamma = \alpha' + \beta'$. Se $\alpha' + \beta' = 0$, si vede facilmente che $\alpha = \beta = 0$, da cui segue $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) + \pi_n(Y)$.

6. Se S^n ed X si intersecano in un solo punto x_0 , si ha

$$\pi_n(X \cup S_n) = \pi_n(X) + R(x),$$

dove $\alpha \in \pi(S^n)$ è dato dalla rappresentazione identica di S^n in sè e $R(x)$ è l' R -modulo, di rango 1, che consiste di tutti gli elementi $r\alpha$ con r nell'anello R grupale di $\pi_1(X)$.

Questi sei esempi, fatta eccezione per l'esempio 1, stanno tutti ad indicare la diversità dell'analisi che si ottiene in uno spazio topologico secondochè si usano i gruppi dell'omologia o dell'omotopia. In alcuni di essi i gruppi omotopici rivelano proprietà che non possono venire descritte coi gruppi dell'omologia. Nel secondo esempio accade il contrario. Perciò non si deve considerare la teoria dei gruppi di omotopia superiori come un sostituto della teoria dell'omologia. Tuttavia si deve ricordare, a proposito del secondo esempio, la ricerca iniziata da HOPF e continuata da EILÉNBERG e SAUNDERS MACLANE sulla relazione fra il gruppo fondamentale ed il secondo gruppo dell'omologia. In questo caso particolare, il secondo gruppo dell'omologia si può definire mediante il gruppo fondamentale, di guisa che sul toro la teoria dell'omologia

si può esprimere mediante l'omotopia. Tuttavia vi sono altri casi, come nella classificazione delle rappresentazioni dei poliedri sulle sfere, nei quali gli invarianti omotopici si esprimono mediante l'omologia, o la teoria duale della coomologia.

8. Gruppi omotopici relativi. — Un'importante estensione dei gruppi omotopici superiori, sono i gruppi omotopici relativi. Sia $X_0 \subset X$ un sottospazio di X , e si prenda un punto $x_0 \in X_0$ come punto base. Si definisce allora il gruppo omotopico relativo $\pi_n(X, X_0, x_0)$ nello stesso modo che $\pi_n(X, x_0)$ o $\pi_n(X, x_0, x_0)$, eccetto che un elemento $\alpha \in \pi_n(X, X_0, x_0)$ è dato da una rappresentazione $f: I^n \rightarrow X$, tale che $f(0, \dots, 0) = x_0$, $f(\dot{I}^n) \subset X_0$. Due rappresentazioni $f_0, f_1: I^n \rightarrow X$ danno lo stesso elemento se, e soltanto se, esiste una deformazione f_t , tale che $f_t(0, \dots, 0) = x_0$, $f_t(\dot{I}^n) \subset X_0$. Per definire l'addizione in π_n , osserviamo che un qualsiasi elemento è dato da una rappresentazione $f: I^n \rightarrow X$, tale che $f(E^{n-1}) = x_0$, dove E^{n-1} è la parte di \dot{I}^n in cui $t_n > 0$, oppure almeno una delle t_1, \dots, t_{n-1} è nulla. L'addizione e l'inverso, α^{-1} o $-\alpha$, di un elemento α , si definiscono come nel caso dei gruppi omotopici assoluti. Supposto X_0 linearmente connesso, segue che $\pi_n(X, X_0, x_0)$ è isomorfo a $\pi_n(X, X_0, \{x_1\})$, per ogni coppia di punti $x_0, x_2 \subset X_0$; onde scriveremo $\pi_n(X, X_0)$ per indicare il gruppo omotopico relativo, riferito ad un punto base non specificato.

Gli operatori sono definiti in modo analogo a quello relativo agli operatori dei gruppi omotopici assoluti, eccetto che ora gli operatori sono elementi di $\pi_1(X_0)$ invece che di $\pi_1(X)$. Siano f_0, f_1 rappresentazioni relative agli elementi $\alpha_0, \alpha_1 \subset \pi_n(X, X_0)$, e sia f_0 deformabile in f_1 con una deformazione f_t , tale che $f_t(\dot{I}^n) \subset X_0$, ed $f_t(0, \dots, 0)$ descriva un circuito che rappresenti un elemento $\xi \in \pi_1(X_0)$. Allora scriveremo $\alpha_0 = \xi\alpha_1$. Come nel caso dei gruppi omotopici assoluti, $\alpha \rightarrow \xi\alpha$ è un automorfismo, T_ξ , di $\pi_n(X, X_0)$, e $\xi \rightarrow T_\xi$ è un omomorfismo di $\pi_1(X_0)$ nel gruppo degli automorfismi di $\pi_n(X, X_0)$. Si noti che, benchè abbiano definizione formalmente analoga, i presenti operatori non coincidono con quelli descritti prima nel caso $X_0 = x_0$. Infatti gli operatori descritti dianzi si riducono all'identità quando $X_0 = x_0$.

Se $n > 2$, allora $\pi_n(X, X_0)$ è commutativo, il che si stabilisce in modo analogo a quello usato per dimostrare che $\pi_n(X)$ è commutativo se $n > 1$. « Ruotando » I^2 intorno al centro si vede che, se $\alpha, \beta \subset \pi_2(X, X_0)$, allora

$$\alpha + \beta - \alpha = (\partial\alpha)\beta,$$

dove $\partial\alpha \in \pi_1(X_0)$ è l'elemento dato dalla rappresentazione $f \in \alpha$, ristretta ad I^2 , e $\pi_2(X, X_0)$ è scritto additivamente sebbene, in generale, esso non sia abeliano.

9. La successione omotopica. — I gruppi omotopici relativi ed assoluti sono collegati dalla seguente successione di omomorfismi

$$\partial \rightarrow \pi_n(X_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X) \xrightarrow{j} \pi_n(X, X_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X_0) \xrightarrow{i} \pi_{n-1}(X) \xrightarrow{j} \dots,$$

dove ciascuna delle $i: \pi_n(X_0) \rightarrow \pi_n(X)$, $j: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, X_0)$ è l'omomorfismo naturale in cui elementi corrispondenti sono dati dalla medesima rappresentazione, e $\partial: \pi_n(X, X_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X_0)$ è l'*omomorfismo contorno*, in cui α , rappresentato da $f: I^n \rightarrow X$, corrisponde a $\partial\alpha$, rappresentato da f ristretto ad \dot{I}^n . Il *primo teorema fondamentale* sui gruppi omotopici relativi, afferma che quella serie è *esatta*, il che vuol dire che il nucleo di ciascun omomorfismo è il gruppo immagine di quello che lo precede. Così, per esempio,

$$\partial^{-1}(0) = j \{ \pi_n(X) \}, \quad j^{-1}(0) = i \{ \pi_n(X_0) \}, \quad i^{-1}(0) = \partial \{ \pi_{n+1}(X, X_0) \}.$$

Si noti la « metà facile » di questo risultato, e precisamente, i risultati ovvii $\partial j = 0$, $j i = 0$, $i \partial = 0$.

10. Spazi fibrati. — I gruppi omotopici relativi sono particolarmente efficaci nello studio degli spazi fibrati, e molti degli spazi incontrati nelle applicazioni della topologia ad altri rami della geometria, nonchè alla teoria dei gruppi continui, sono spazi fibrati. Uno spazio fibrato, X , è uno spazio che è nella relazione seguente con un altro spazio B , lo spazio base, ed uno spazio F , la fibra tipo. Vi è una rappresentazione $P: X \rightarrow B$ tale che

1) $P^{-1}(b)$ è omeomorfo ad F , per ogni punto $b \in B$,

2) vi è un insieme aperto $U \subset B$, per ogni punto, $b \in B$, tale che $P^{-1}(U)$ è l'immagine di $U \times F$, in un omeomorfismo Φ , tale che $\Phi(b' \times F) = P^{-1}(b')$ ($b' \in U$).

Gli insiemi $P^{-1}(b) \subset X$ sono chiamati *fibre*, e P è chiamata una rappresentazione fibrata. Evidentemente il prodotto topologico $B \times F$ è uno spazio fibrato, ma uno spazio fibrato X , su di uno spazio base, B , non è necessariamente omeomorfo a $B \times F$.

La rappresentazione $P: X \rightarrow B$ ovviamente determina un omomorfismo $\theta: \pi_n(X, F_0) \rightarrow \pi_n(B)$, dove F_0 è una componente di una fibra. Si può allora dimostrare che θ è un isomorfismo di $\pi_n(X, F_0)$ su $\pi_n(B)$.

Diamo alcuni esempi di applicazione di questo teorema, considerato assieme alla successione omotopica.

1. $X = S^3$, $B = S^2$. — La rappresentazione $P = f: S^3 \rightarrow S^2$, data in un esempio precedente, è, come si vede facilmente, una rappresentazione fibrata. Le fibre sono i cerchi massimi $\xi = \xi_0 e^{i\theta}$, $\eta = \eta_0 e^{\theta}$.

In base al suddetto teorema, possiamo identificare $\pi_n(S^2)$ con $\pi_n(S^3, F_0)$. Se $n > 1$, allora $\pi_n(F_0) = 0$ ($F_0 = S^1$). Quindi, dall'esattezza della successione omotopica

$$\pi_n(F_0) \xrightarrow{i} \pi_n(S^3) \xrightarrow{j} \pi_n(S^3, F_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F)$$

segue che, se $n > 2$,

1. $\pi_{n-1}(F_0) = 0$, da cui $j\pi_n(S^3) = \partial^{-1}(0) = \pi_n(S^3, F_0)$. Vale a dire la rappresentazione j opera sopra $\pi_n(S^3, F_0) = \pi_n(S^2)$.

2. $\pi_n(F) = 0$, da cui $0 = j^{-1}(0)$. Vale a dire j è ora un isomorfismo.

Così $\pi_n(S^2) \simeq \pi_n(S^3)$, se $n > 2$, e la rappresentazione P induce un isomorfismo di $\pi_n(S^3)$ su $\pi_n(S^2)$.

2. Lo spazio proiettivo complesso. — Sia $\Pi^{(n)}$ uno spazio proiettivo, riferito ad $n + 1$ coordinate complesse omogenee z_0, \dots, z_n . Possiamo assoggettare queste coordinate alla condizione

$$\bar{z}_0 z_0 + \bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n = 1.$$

Allora, posto $z_r = x_r + iy_r$, dove x_r, y_r siano reali, quella condizione equivale alla

$$x_0^2 + \dots + x_n^2 + y_0^2 + \dots + y_n^2 = 1,$$

ossia è l'equazione di una $(2n + 1)$ -sfera S^{2n+1} . La rappresentazione $P: S^{2n+1} \rightarrow \Pi^{(n)}$, in cui il punto $(z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1}$ corrisponde al punto $(z_0, \dots, z_n) \in \Pi^{(n)}$, è una rappresentazione fibrata. Infatti $P^{-1}(a_0, \dots, a_n)$ è il cerchio massimo dato da $z_r = e^{i\theta} a_r$, e questi cerchi massimi sono le fibre. Come nel caso di S^3 ed S^2 , che è un $\Pi^{(1)}$, si dimostra che $\pi_r(S^{2n+1}) \simeq \pi_r(\Pi^{(n)})$ se $r > 2$, mentre invece $\pi_2(\Pi^{(2)})$ è ciclico infinito. Dunque $\pi_r(\Pi^{(n)}) = 0$, se $2 < r < 2n + 1$.

3. $X = G, F = H$, dove G è un gruppo di LIE ed H è un sottogruppo chiuso, talchè G è un gruppo topologico e non un « elemento di gruppo » nel senso della teoria originaria di LIE. Allora si dimostra facilmente che G è diviso in fibre sia dagli insiemi laterali destri che dagli insiemi laterali sinistri di H .

4. $X = \Gamma_n, F = \Gamma_{n-1}$, dove Γ_n è il gruppo delle rotazioni in $n + 1$ variabili reali, e Γ_{n-1} è un sottogruppo che lascia fisso qualche vettore particolare. Allora come spazio base si può prendere la n -sfera unità, S^n , onde segue $\pi_s(\Gamma_n, \Gamma_{n-1}) = 0$ se $s < n$. Dalla successione omotopica

$$\pi_{r+1}(\Gamma_n, \Gamma_{n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_r(\Gamma_{n-1}) \xrightarrow{i} \pi_r(\Gamma_n) \xrightarrow{j} \pi_r(\Gamma_n, \Gamma_{n-1})$$

risulta che :

1. se $r < n$, allora $\pi_r(\Gamma_n, \Gamma_{n-1}) = 0$ ed $i : \pi_r(\Gamma_{n-1}) \rightarrow \pi_r(\Gamma_n)$ opera « sopra » $\pi_r(\Gamma_n)$.

2. se $r + 1 < n$, allora $\pi_{r+1}(\Gamma_n, \Gamma_{n-1}) = 0$, da cui $\partial\pi_{r+1}(\Gamma_n, \Gamma_{n-1}) = i^{-1}(0) = 0$. Pertanto $i : \pi_r(\Gamma_{n-1}) \rightarrow \pi_r(\Gamma_n)$ è ora un isomorfismo.

Dunque, se $n > r + 1$, avremo

$$\pi_r(\Gamma_{r+1}) \cong \pi_r(\Gamma_{r+2}) \cong \dots \cong \pi_r(\Gamma_n),$$

sicchè $\pi_r(\Gamma_{r+1})$ è isomorfo ad un gruppo quoziente di $\pi_r(\Gamma_r)$, poichè $i : \pi_r(\Gamma_{n-1}) \rightarrow \pi_r(\Gamma_n)$ opera sopra $\pi_r(\Gamma_n)$ se $n > r$. In particolare, sia $r = 2$. Il gruppo Γ_2 , considerato come spazio topologico, è lo spazio proiettivo reale a tre dimensioni, ed il suo spazio ricoprente universale è $l'S^3$. Pertanto $\pi_2(\Gamma_2) = 0$, da cui $\pi_2(\Gamma_n) = 0$ per ogni $n \geq 2$. Così pure $\pi_2(\Gamma_1) = 0$, poichè Γ_1 è un cerchio. È dunque $\pi_2(\Gamma_n) = 0$ per ogni n . Analogamente $\pi_1(\Gamma_1)$ è ciclico infinito, e $\pi_1(\Gamma_n)$ è di ordine due se $n > 1$.

Questi ed altri risultati trovansi schematicamente riassunti nella seguente tabella, in cui Z_m denota un gruppo ciclico di ordine $m \leq \infty$ ed il segno + indica la somma diretta.

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5
Π_1	Z_∞	Z_2			
Π_2	0	0	0		
Π_3	0	Z_∞	$Z_\infty + Z_\infty$	Z_∞	
Π_4	0	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_2	0

BIBLIOGRAFIA

1. H. SEIFERT e W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig (1934), ristampato negli Stati Uniti.
2. H. POINCARÉ, *Cinquième complément à l'analysis situs*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 18 (1904), 45-110.
3. M. DEHN, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, « Math. Ann. », 69 (1910), 137-168.
4. H. HOPF, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, « Math. Ann. », 104 (1930-31), 637-665.

5. H. HOFF, *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, « Fundamenta Math. », 25 (1935), 127-140.
 6. W. HUREWICZ, *Beiträge zur Topologie der Deformationen*, « Proc. Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam », 38 (1935), 112-119; 521-528; 39 (1936), 117-125; 215-224.
 7. G. W. WHITEHEAD, *Homotopy properties of the real orthogonal groups*, « Annals of Math. », 43 (1942), 132-146.
 8. B. ECKMANN, *Zur Homotopietheorie gefaseter Räume*, « Comm. Math. Helvetici », 14 (1941-2), 141-192.
 9. W. HUREWICZ e N. E. STEENROD, *Homotopy relations in fibre spaces*, « Proc. Nat. Acad. Sci. », 27 (1941), 60-64.
 10. C. EHRESMANN, *Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement*, « Bull. Soc. Math. de France », 72 (1944), 27-54.
-