Attilio Frajese

Osservazioni sulla teoria delle parallele in Euclide

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 50–54.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_50_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Osservazioni sulla teoria delle parallele in Euclide [1].

Nota di ATTILIO FRAJESE (a Roma).

Sunto. - *Si formula un'ipotesi sul motivo che avrebbe indotto* EUCLIDE *ad introdurre la prop. 17 del libro I degli Elementi, che apparentemente è inutile.*

La trattazione della teoria delle parallele che si trova nel I Libro degli *Elementi di Euclide* è completamente rigorosa.

A partire dalla definizione 23ª di rette parallele come quelle di un piano che, prolungate, non si incontrano, EUCLIDE passa all'enunciazione del V postulato e ad una serie di proposizioni che, indipendenti o dipendenti dal postulato che siano, offrono uno svolgimento inattaccabile dal punto di vista dol rigore. E poichè ARISTOTELE [2]. appena qualche decennio prima di EUCLIDE, rimprovera una specie di circolo vizioso nel quale si dibatte la teoria delle parallele a lui nota, è chiaro che egli non ha presente una trattazione simile a quella di EUCLIDE, che anche agli occhi suoi sarebbe inattaccabile; ma ha in mente qualche trattazione preeuclidea, che doveva essere corrente ai suoi tempi (TEUDIO ?), e nella quale doveva nascondersi qualche errore logico. Pertanto, dato il fatto che così breve intervallo di tempo separa ARISTOTELE da EUCLIDE, e dato che nessuna notizia ci è giunta su altri matematici *sistematori* di quel breve periodo di tempo, non sembra

[1] Da una conferenza tenuta al Corso di perfezionamento in Matematica e Fisica dell'Università di Bologna il 25 febbraio 1951

[2] « Analyt. pr. », 11, 16, 65 a., 4-7.

arrischiato dedurre che la sistemazione rigorosa della teoria delle parallele, quale si trova negli *Elementi*, sia dovuta ad EUCLIDE stesso.

È a tutti noto che, nella prima parte della sua trattazione sulle parallele, EUCLIDE non impiega il V postulato. Egli nella proposizione 16 ci dà un teorema (che potremo brevemente chiamare *dell'angolo esterno maggiore*), in cui appunto dimostra che in ogni triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti.

La dimostrazione, che si fonda sull'infinità della retta, richiede inoltre l'applicazione del primo criterio d'uguaglianza dei triangoli e il teorema dell'uguaglianza degli angoli opposti al vertice.

Fa seguito la proposizione 17, che costituisce un puro e semplice corollario della prop. 16: essa afferma che in ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti. La dimostrazione è estremamente semplice, perchè, scritta la disuguaglianza $\alpha > \beta$ dove α è un angolo esterno e β un angolo interno non adiacente, basta aggiungere ad ambedue i membri lo stesso angolo γ interno adiacente ad α per ottenere la nuova disuguaglianza:

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

e quindi:

$$\beta + \gamma < 2 \text{ retti}$$

come volevasi dimostrare.

Il teorema n. 16 dell'angolo esterno maggiore, a parte altre applicazioni (ad esempio quella che se ne fa per l'estensione del così detto II criterio d'uguaglianza dei triangoli), trova la sua naturale applicazione nella proposizione 27, nella quale si afferma che: « Se due rette tagliate da una terza formano angoli alterni interni uguali, le due rette sono parallele ». La dimostrazione di questo teorema (che per brevità chiameremo *Primo teorema delle parallele*) è estremamente semplice: infatti se le due rette non fossero parallele, ma si incontrassero, si verrebbe ad avere un triangolo nel quale un angolo esterno sarebbe uguale ad un angolo interno non adiacente, contro la proposizione 16.

Nella proposizione 28 EUCLIDE estende il teorema della proposizione 27 al caso degli angoli corrispondenti e degli angoli coniugati interni (*interni dalla stessa parte*). In sostanza, l'insieme delle proposizioni 27 e 28 potrebbe anche ridursi all'enunciato: « Se due rette, tagliate da una terza, formano angoli coniugati interni supplementari, esse sono parallele ».

E sotto questa forma la dimostrazione si potrebbe trarre con estrema semplicità della proposizione 17. Infatti, se le due rette si incontrassero, si avrebbe un triangolo nel quale la somma di due angoli sarebbe uguale a due retti, contro la proposizione 17 che afferma invece essere la somma stessa minore di due retti.

Fin qui EUCLIDE non ha ancora utilizzato il suo V postulato, il quale è da lui enunciato, com'è a tutti noto, nel modo seguente: « Se una retta, tagliandone altre due, forma angoli coniugati interni (« interni della stessa parte ») la cui somma è minore di due retti, le due rette, se indefinitamente prolungate, si incontrano dalla parte in cui la detta somma è minore di due retti ».

Questa proposizione trova applicazione nel teorema 29, che contiene la proposizione inversa di quella dei teoremi 27 e 28, e cioè: « Se due rette sono parallele, esse tagliate da una terza formano angoli alterni interni uguali, coniugati interni supplementari, ecc. » ([3]).

La dimostrazione procede per assurdo: se, ad esempio, l'angolo α fosse maggiore dell'angolo alterno interno β aggiungendo ad ambo i membri della disuguaglianza $\alpha > \beta$ lo stesso angolo γ adiacente di α, si ricaverebbe:

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

ossia la somma dei due angoli coniugati interni $\beta + \gamma$ risulterebbe minore di due retti, cosicchè per il V postulato le due rette dovrebbero incontrarsi: contro l'ipotesi del loro parallelismo.

Sostanzialmente la stessa dimostrazione varrebbe per il caso degli angoli coniugati interni se si volesse dimostrarne la supplementarità.

Infatti, se gli angoli coniugati interni non fossero supplementari, la loro somma (da una delle parti della trasversale) risulterebbe minore di due retti, di modo che le rette si incontrerebbero da quella parte, contro l'ipotesi.

Dopo altre proposizioni riguardanti la proprietà transitiva del parallelismo (equivalente all'unicità della parallela per un punto estesno ad una retta) e la costruzione della retta parallela, si passa alla proposizione 32, nella quale, applicando la propozizione 29 (II *teorema delle parallele*), cioè, in ultima analisi, il V postulato, si dimostra nel modo facile a tutti noto che la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti e che l'angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti. Cosicchè, volendo schematizzare la serie delle proposizioni euclidee riguardanti le parallele, avremmo il seguente ordine di successione:

([3]) Per brevità lo chiameremo: *Secondo teorema delle parallele.*

1) Definizione 23ª di rette parallele;

2) Prop. 16 *dell'angolo esterno maggiore*;

3) Prop. 17 sulla somma di due angoli (di un triangolo) minore di due retti;

4) Proposizioni 27 e 28: *Primo teorema delle parallele*;

5) V postulato (delle parallele);

6) Prop. 29: *Secondo teorema delle parallele*:

7) Prop. 32: Teorema sulla somma dei tre angoli del triangolo e teorema *dell'angolo esterno somma* (degli angoli interni non adiacenti).

Esaminando questo schema si osserva che le proposizioni 16 e 17 sono contenute nella proposizione 32. Il teorema *dell'angolo esterno maggiore* potrebbe invero dedursi come semplice corollario del teorema *dell'angolo esterno somma*, così come il teorema sulla somma di due angoli di un triangolo (minore di due retti) potrebbe ricavarsi immediatamente come corollario del teorema sulla somma dei tre angoli di un triangolo (uguale a due retti).

Ma la proposizione 16 costituisce un lemma necessario, perchè viene impiegata, come si è visto, nella dimostrazione del primo teorema delle parallele, cosicchè nella intelaiatura della esposizione euclidea essa deve venire necessariamente anticipata: quindi può dirsi che la proposizione 32 costituisca piuttosto una estensione della proposizione 16, per quanto riguarda l'angolo esterno.

Ma non altrettanto può dirsi per la proposizione 17, la quale non viene affatto utilizzata nel libro I, cosicchè potrebbe essere senz'altro soppressa senza alcun danno apparente nella economia degli *Elementi*, in quanto essa seguirebbe come corollario immediato, che potrebbe anche essere sottaciuto, della proposizione 32.

Sorge spontanea l'idea che EUCLIDE abbia enunciato la proposizione 17 per mostrare fino a qual punto egli potesse giungere facendo a meno del V postulato: quasi che egli, non avendo potuto dimostrare il postulato stesso, ne accettasse a malincuore l'impiego.

Non può certo negarsi a questa veduta il suo valore, tanto più che la veduta stessa ben si armonizza con la necessità di carattere storico-psicologico, che si presenta ogni qual volta negli *Elementi* si trova il rarissimo caso di una proposizione apparentemente inutile. Ma forse accanto al motivo in questione può anche affacciarsi l'altro della completezza espositiva, qualora si parta dalle seguenti considerazioni.

La proposizione 17 può costituire la prima proposizione di uno di quei «*quadrilateri*» di proposizioni costituite dalla *diretta*, dalla *inversa*, dalla *contraria*, e dalla *contronominale*.

È a tutti noto che, secondo la prima legge delle inverse, la contronominale (cioè l'inversa della contraria, o la contraria dell'inversa) è sempre valida insieme alla proposizione diretta, mentre l'inversa può valere o no, e che la stessa sua sorte segue la contraria. Se assumiamo come proposizione diretta la 17, vediamo che la sua inversa è il V postulato, che la sua contraria è il secondo teorema sulle parallele e che la sua contronominale è il primo teorema delle parallele, secondo il seguente schema:

1) *Diretta*: proposizione 17,

2) *Inversa*: V postulato,

3) *Contraria*: Secondo teorema delle parallele, (proposizione 29),

4) *Contronominale*: I teorema delle parallele (prop. 27, 28).

Che le quattro proposizioni stiano in questa relazione si vede subito osservando che l'ipotesi della proposizione 17 è l'esistenza di un triangolo, la quale costituisce la tesi del V postulato; che la tesi della proposizione 17 è: $\alpha + \beta < \pi$, ciò che costituisce l'ipotesi del V postulato: che la negazione dell'ipotesi della proposizione 17 equivale al parallelismo delle rette; che la negazione della tesi della proposizione 17 si riduce a:

$$\alpha + \beta = \pi$$

cioè alla supplementarità degli angoli coniugati interni (4).

Risulta così che necessariamente il primo teorema sulle parallele, costituendo la contronominale della proposizione 17, vale indipendentemente dal V postulato, il quale invece, essendo contronominale rispetto al secondo teorema sulle parallele, è ad esso logicamente equivalente.

Da questo punto di vista la proposizione 17, anzichè essere inutile, si presenta come capostipite di uno dei famosi *quadrilateri* di proposizioni che EUCLIDE predilige, quali ad esempio quello delle proposizioni 7, 8, 9, 10 del libro V, delle proposizioni 5, 6, 7, 8 del libro X e della proposizione 9 dello stesso libro X, in cui si enuncia il criterio di riconoscimento della incommensurabilità.

(4) Negare la: $\alpha + \beta < \pi$ conduce alla relazione di uguaglianza e non anche a quella della disuguaglianza in senso opposto, come subito si vede.

Per le relazioni tra le varie proposizioni sulle parallele cfr. DE MORGAN (1848) ad es. in T. L. HEATH, *The thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge 1908, vol. I, pag. 309. Per la prop. 17 e il post. V cfr. anche: B. LEVI, *Leyendo a Euclides*. Rosario, 1947.