Bollettino Unione Matematica Italiana

Tommaso Boggio

Sulla serie di Taylor

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 55–56.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_55_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sulla serie di Taylor.

Nota di TOMMASO BOGGIO (a Torino).

Sunto. - *Viene data una condizione, assai meno restrittiva di quella usuale, per la validità dello sviluppo di una funzione in serie di* TAYLOR.

Nei trattati di Analisi (¹) si trova la proposizione seguente:

Se la funzione f(x) *è tale che le successive derivate, per tutti i valori di* x *compresi in un intervallo* $x_0 \vdash\!\dashv (x_0 + h)$ *siano sempre minori, in valor assoluto, di una quantità* A, *qualunque sia l'ordine della derivata, si avrà:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hDf(x_0) + \frac{h^2}{2!} D^2 f(x_0) + \dots \tag{1}$$

cioè *sussiste lo sviluppo in serie di Taylor.*

Ora mi propongo di esporre qui (cosa che ho già svolto da anni nel mio insegnamento universitario) una condizione assai meno restrittiva di quella indicata dal teorema precedente, e precisamente si ha la proprietà:

Se esistono due quantità positive finite A *ed* α *tali che, qualunque sia l'intero positivo* n, *si abbia*

$$\operatorname{mod} D^n f(x) < A\alpha^n, \tag{2}$$

per tutti i valori di x *compresi nell'intervallo* $x_0 \vdash\!\dashv (x_0 + h)$, *con* $h > 0$, *allora sussisterà lo sviluppo in serie* (1) *di Taylor.*

Infatti, si ha:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hDf(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(x_0) + \frac{h^n}{n!} D^n f(x_0 + \theta h),$$

ove $0 < \theta < 1$; l'ultimo termine, in virtù della (2), risulta, in valor assoluto, minore di

$$A(h\alpha)^n / n!,$$

che ha per limite 0 quando n cresce indefinitamente; di qui risulta il teorema.

Lo sviluppo (1) sussiste anche se invece della (2) è verificata

(¹) Cfr. ad es. G. PEANO, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, vol. I, pag. 281 (Torino a. 1893); G. SANSONE, *Lezioni di Analisi matematica*, parte I, pag. 335 (Padova, a. 1930).

la condizione seguente, apparentemente più generale:

(3) $$\text{mod}\, D^n f(x) < A\alpha^n n^\beta, \qquad \text{con } \beta \geq 1,$$

Infatti, siccome $n < e^n$, si ha;

$$\alpha^n n^\beta < \alpha^n e^{\beta n} = (\alpha e^\beta)^n = \alpha_1{}^n,$$

perciò la (3) può scriversi:

$$\text{mod}\, D^n f(x) < A\alpha_1{}^n,$$

che non differisce dalla (2).