LUIGI TENCA

Sulla risoluzione dei problemi di terzo grado col metodo meccanico di Guido Grandi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.2, p. 143–149.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_2_143_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Sulla risoluzione dei problemi di terzo grado col metodo meccanico di Guido Grandi.

Nota di LUIGI TENCA (a Firenze).

Sunto. - *Vengono riportate le risoluzioni semplici ed eleganti di* GUIDO GRANDI *dei problemi di terzo grado col suo metodo meccanico, per mostrare, con un esempio, la genialità con cui questo Autore sapeva trattare e risolvere le questioni geometriche che gli venivano sottoposte da altri geometri chiedendo chiarimenti e consigli.*

GUIDO GRANDI (1671-1742), illustre matematico dello Studio Pisano, noto per la sua molteplice attività come matematico, fisico, cultore esimio delle ricerche sulle acque, teologo, filosofo, storico, letterato, poeta, non è da noi abbastanza apprezzato e per certe sue stranezze, e per la sua ostinazione nel sostenere, alle volte anche in forma paradossale, alcune sue concezioni, alcune sue opinioni, certamente discutibili. A questo si aggiunga un carattere difficile che facilmente lo portava a polemiche lunghe e astiose nelle quali non usava riguardi verso i suoi avversari, polemiche che facevano dimenticare le sue alte doti di mente e di cuore.

La sua vera personalità, il suo valore, ed anche la sua bontà, mascherata da una rozzezza che gli era tanto dannosa, risultano dal suo copioso epistolario, purtroppo incompleto, (chi scrive ha avuto la fortuna di esaminarlo nei vari luoghi dove si trovano le lettere da lui inviate e quelle da lui ricevute) in gran parte inedito: la sua pubblicazione servirebbe e dare a questo scienziato il posto che giustamente gli spetta.

In detto epistolario, per stare a ciò che può interessare i lettori di questo « Bollettino », spiccano le sue geniali facoltà inventive, la sua facilità nel trattare, chiarire, risolvere le questioni più astruse che molti matematici gli proponevano; fra questi TOMASO CEVA provava un vero godimento nell'eccitare tale sua attività col proporgli sempre nuovi problemi (e ciò risutta da centinaia di lettere) nel sollevare difficoltà, nel discutere risoluzioni, alle volte curiose, che il GRANDI gli comunicava, vive, spontanee, scritte in fretta fra una lezione e l'altra, fra una visita e l'altra a terre da bonificare, a fiumi, a paludi, a porti (era anche *Sovraintendente alle acque per il Granducato di Toscana*, succedendo, in questa carica, al VIVIANI), fra un groviglio di pratiche religiose, fra ricerche di documenti storici, fra polemiche con religiosi, storici, cultori di leggi, matematici, fisici.

Il GRANDI non si arrendeva mai davanti alle difficoltà di un problema, persisteva fino a che aveva trovata la via giusta, alle volte la più impensata, per giungere alla meta, o per mostrare la impossilità o la indeterminatezza della questione propostagli.

Peccato fosse distratto da troppe occupazioni, altrimenti chissà quale contributo avrebbe dato alle matematiche, specialmente alla geometria che era la scienza da lui prediletta. E appunto nelle risoluzioni preferiva i metodi che gli suggeriva la geometria pura, poche volte ricorreva all'analitica, però ricorreva pure a risoluzioni meccaniche e gli piaceva anche ricorrere al sussidio delle varie parti della fisica nella forma più inaspettata, come ad esempio quando risolve un problema proposto da GIOVANNI BERNOULLI sulla costruzione in infiniti modi di archi aventi la stessa lunghezza di un arco dato. « .... *è dovere*. scriveva nella sua « Risposta Apologetica alle opposizioni fatte dal sig. dott. ALESSANDRO MARCHETTI » (Lucca, presso P. Frediani, 1712), *che di quando in quando la Geometria richiami al suo tribunale quest'altre scienze.... forzandole insieme a contribuire qualche cosa del loro all'erario delle cognizioni matematiche....* ».

Quando doveva studiare una nuova curva o da lui inventata o suggeritagli da un conoscente, la considerava come un essere vivente, la *carezzava,* perchè così anche *la più selvaggia* gli avrebbe palesato i suoi misteri. E TOMASO CEVA, bonariamente, lo assecondava e un giorno *gli fece scrivere dalla sua cicloide anomala* bei versi latini di ringraziamento per tutto quanto aveva fatto per lei ([1]).

Per dare un'idea de' suoi metodi, delle sue geniali risoluzioni

([1]) Lettera in data 1 giugno 1700: « Orsù cicloide mia, vien qua; è « troppo il dovere che tu ringrazi il tuo benefattore; va innanzi a Lui, meccaniche, riportiamo qui la sua trattazione dei problemi di terzo grado.

1. Il Grandi, in una lettera a T. Ceva, in data 28 ottobre 1703, aveva indicato dei metodi meccanici per costruire l'iperbole equilatera e precisamente ne indicava quattro che sono analoghi, supponendo di avere a disposizione riga, matita.

Prendiamo un filo flessibile e inestensibile e fissiamo un suo estremo in un punto A di una superficie piana verticale, ad esempio con una punta, e uniamo all'altro estremo un corpo solido pesante, avente, ad esempio, la forma di un disco, con un foro verso il contorno per poter fissare il filo: se lasciamo libero il disco, il filo si disporrà verticalmente (fig. 1), lungo la superficie piana che si considera, e l'estremo libero si fermerà in un punto B. Si badi che l'estremo superiore del filo risulterà determinato dalla punta, l'inferiore dal punto in cui la direzione verticale del filo incontra la circonferenza del disco. Naturalmente per fissare l'estremo alla punta fissa si dovrà avere in più un pezzetto, oltre l'estremo della parte *operativa* del filo, e così per fis-

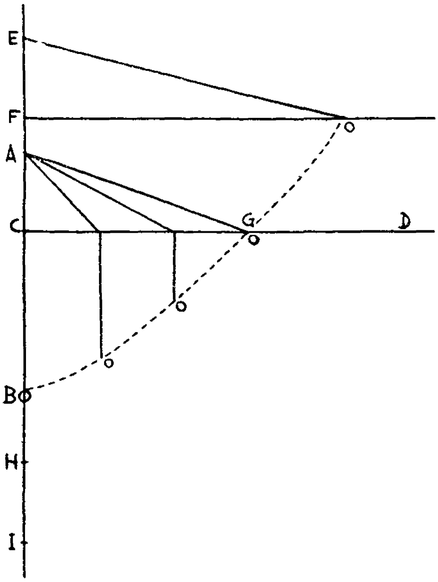

Fig. 1.

« che ti ha dato poco meno della vita, inchinati e ringrazialo. Su via, parla:

Curva solo trochois mihi met vix nota iacebam;
Me tetigit Guido, vimque animosque dedit,
. . . .
. . . .

« Perdoni a questa povera linea se non ha saputo parlar meglio perchè « non è più che un anno e non so quanti mesi che è al mondo... ».

Un'osservazione. Parlando dell'*apparecchio polisettore dell'angolo* di T. Ceva, non si ricorda in nessun libro che il Grandi lo modificò in modo che potesse anche servire alla costruzione delle due medie proporzionali fra due segmenti. Scriveva il Ceva al Grandi, in data 2 novembre 1701, da Milano: « ... quella aggiunta che ha fatto allo strumento per renderlo « atto alla inserzione delle due medie proporzionali, è una invenzione « d'oro, anzi una perla inestimabile... ».

sare l'altro estremo al disco, in modo che si trovi sulla circonferenza del disco.

Tracciamo il segmento AB con la riga e da un punto C di esso, la perpendicolare CD ad AB a destra, che risulterà orizzontale. Premendo ora il filo in C con un'altra punta mobile, facciamola scorrere lungo la CD: l'estremo mobile del filo viene così a percorrere un arco di una curva che è un'iperbole equilatera, limitato alla retta CD in un punto G, come facilmente si può dimostrare. Ciò che si è fatto a destra si può ripetere a sinistra: B è un vertice dell'iperbole, il suo centro è in un punto H sul prolungamento di AB tale che $BH = AC$; l'altro vertice I dell'iperbole è il simmetrico di B rispetto a H, l'altro ramo dell'iperbole è il simmetrico del trovato rispetto al punto H. Un punto qualunque del filo fra C e B genera pure un arco di iperbole eguale alla precedente fino a che raggiunge la retta BD, poi un arco di circonferenza. Volendo *prolungare l'arco di iperbole* BG percorso da B, si dovrebbe far uso di un filo più lungo, lasciare l'estremo mobile in B, fissare l'altro estremo, tenendo il filo teso, sul prolungamento di BA in E, tracciare la perpendicolare alla retta AB da un suo punto F sulla EB verso il basso, in modo che sia $EF = AC$, ripetere l'operazione prima indicata facendo ora scorrere la punta mobile lungo la nuova perpendicolare tracciata alla AB.

L'iperbole equilatera anche si ha se si prende un filo avente gli estremi situati su una verticale, con fisso l'estremo in A e mobile quello in B, essendo A più in alto di B, ma in modo che la lunghezza del filo sia maggiore di AB (fig. 2). Preso sulla verticale un punto C più in alto di A, tale che sia $AC + CB$ eguale alla lunghezza del filo, si traccia per C la perpendicolare CD a BC, a cavallo ad una punta in C si passa il filo: quando tale punta percorre la CD, sempre sostenendo il filo, l'estremo mobile percorre un arco di un'iperbole equilatera. Il Grandi consiglia di usare in luogo della punta mobile, una piccola carrucola che regga il filo nella gola, e che scorra con la sua staffa lungo la CD, come se questa fosse un piccolo regolo in cui è infilata la staffa della carrucola.

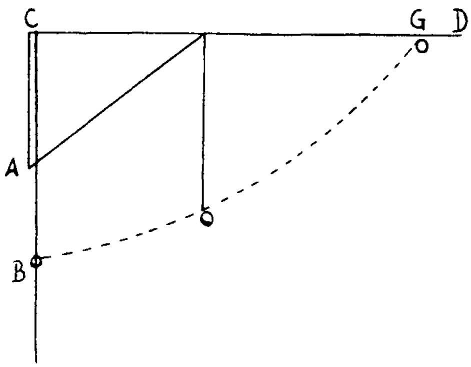

Fig. 2.

Come casi particolari l'estremo fisso del filo può coincidere, all'inizio, con l'estremo mobile; oppure l'estremo fisso può essere sulla verticale (figg. 3 e 4), all'inizio, più in basso dell'estremo mobile.

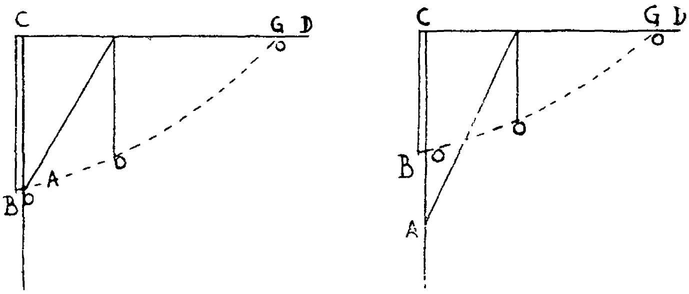

Fig. 3 e 4.

Si noti che nei vari casi, se la CD è inclinata sulla AB, si ha ancora un'iperbole equilatera, ma differentemente disposta e orientata.

2. Passiamo ora alla risoluzione dei problemi di terzo grado, supponendo di operare sopra un piano verticale nel quale è disposto il foglio sul quale si disegna, di avere a disposizione riga, compasso, matita (o gessetto, o carboncino) e di usare il primo metôdo indicato per la costruzione dell'iperbole equilatera (²).

PROBLEMA. I. - *Dati due segmenti* a $<$ b, *determinare le due medie proporzionali.*

Si traccia un segmento orizzontale AB (fig. 5) eguale ad a e un segmento verticale AC eguale a b e verso il basso. Si costruisce poi il rettangolo $ABDC$ e sia E il punto d'incontro delle sue diagonali. Con centro in E e raggio EB si traccia l'arco di circonferenza BD a destra del segmento BD.

Sul prolungamento di BA si prende $AF = \frac{1}{2} AB$; da F si traccia la verticale x e su essa si prende verso l'alto un segmento

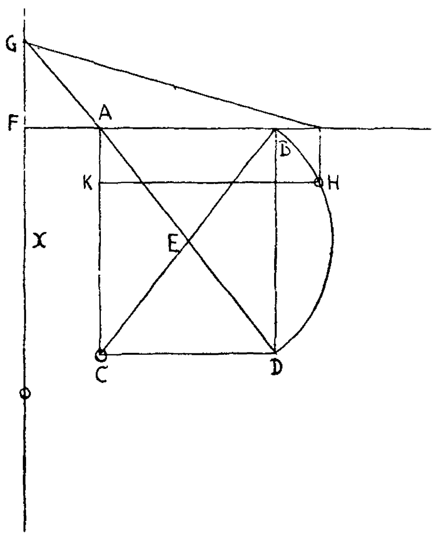

Fig. 5.

(²) Vedi GUIDO GRANDI, *Flores Geometrici:* » Mesolabii ». Firenze, G. ~~Tartini e S. Franchi, 1728. Vedi anche *I Fiori Geometrici* del P. Abate~~

FG in modo che GA risulti eguale alla metà di AC. Si prende ora un filo la cui lunghezza sia eguale a $3AG$, e tenendo fisso un estremo in G, con una punta, si applica all'altro estremo un disco metallico, lasciando il filo libero che si disporrà lungo la retta x. Spostiamo con un'altra punta mobile il filo lungo la retta FB, l'estremo mobile percorre allora un'iperbole equilatera passante per C della quale possiamo segnare quanti si vogliono punti. Nel compiere l'operazione indicata, quando l'estremo mobile cade sull'arco BD in un punto H, possiamo segnarlo, e il problema è risolto, tracciando per H la perpendicolare HK ad AC.

Infatti facilmente si dimostra che

$$AB : HK = HK : KC = KC : AC$$

cioè

$$a : HK = HK : KC = KC : b.$$

Problema II. – Possiamo ora risolvere anche il problema della duplicazione del cubo e, più in generale; *Trovare la lunghezza dello spigolo del cubo* m*-plo di un cubo dato per mezzo del suo spigolo* a.

Col procedimento seguito nel primo problema possiamo determinare due segmenti b e c tali che

$$a : b = b : c = c : ma$$

da cui

$$c^3 = ma^3.$$

Problema III. – Veniamo ora alla risoluzione del *problema della trisezione dell'angolo.*

Sia dato l'angolo XAY (acuto) (fig. 6). Per un punto B di AX si traccia BC perpendicolare a AY; preso $AD = AC$ sul prolungamento di CA, si costruisce il rettangolo $CDEB$. Preso su AX un segmento AF doppio di AB, con centro in A e raggio AF, si descrive un arco di circonferenza FG che taglierà in G il lato AY.

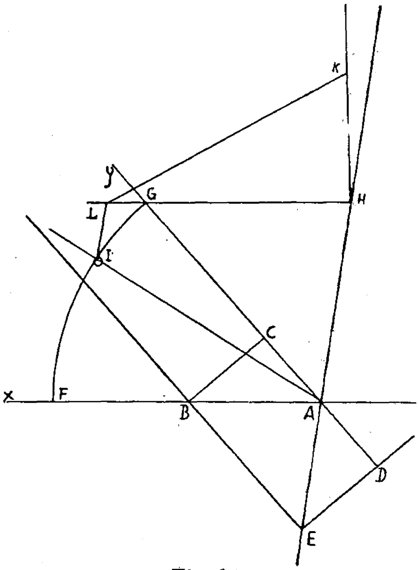

Fig. 6.

D. Guido Grandi, tradotti e spiegati da Tommaso Narducci, con l'aggiunta di alcune dimostrazioni dello stesso Autore. Lucca, F. Marescandoli, 1729.

Si traccia da G la parallela GH a AX a incontrare il prolungamento di EA in H. Si dispone la figura in modo che la retta AH risulti verticale, si traccia per H, verso l'alto, la perpendicolare alla GH e si prende su essa un segmento $HK = AE$.

Preso un filo lungo quanto $HK + AH$, se ne fissa un estremo in K, all'altro si unisce un disco e, lasciatolo libero, si fa scorrere la punta mobile sulla HG, premendo sul filo. Si segna il punto I sull'arco di circonferenza (corrispondente a un punto L della retta HG) FG in cui viene a passare l'estremo mobile del filo: l'angolo YAI è un terzo dell'angolo dato.

La dimostrazione è semplice: si badi che l'iperbole equilatera che, per un'osservazione fatta, ancora si ottiene quantunque la retta GH non sia perpendicolare ad AH, ha il centro in E, è tangente alla retta AX nel punto A, ne sono asintoti le rette EB, ED.

3. Concludendo senza più dilungarci, possiamo affermare che col metodo del Grandi si risolvono tutti i problemi di 3° grado. È però importante la seguente osservazione. Si può erroneamente credere che il piano verticale non sia necessario, cioè che si possa ricorrere anche ad un piano inclinato, ma si deve badare che in questo caso, a causa dell'attrito che viene esercitato dal disco sulla superficie piana, il disco *ritarda* e il filo, nella parte inferiore alla retta percorsa dalla punta, non si dispone sopra una retta di massima pendenza, di più la deviazione aumenta con lo spostarsi della punta e ciò è causa di errore. Se poi, per ridurre al minimo l'attrito, si sostituisse al disco una sferetta metallica, ne verrebbe che il punto d'attacco del filo ad essa non sarebbe più aderente alla superficie, ma da essa ad una certa distanza che porterebbe qualche difficoltà, inoltre tale distanza diminuirebbe con lo spostarsi della punta stessa sulla retta da essa percorsa e ciò sarebbe causa di errori; si aggiunga che la sferetta *rotola* sulla superficie piana nel movimento e il filo si torcerebbe e si accorcerebbe.