Luigi Muracchini

Ricerche sulle varietà quasi-asintotiche. I. Quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 198–205.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_198_0>

Ricerche sulle varietà quasi-asintotiche
I. Quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - *Si studiano le varietà* V_k *che posseggono dati sistemi di calotte di varietà, o di varietà subordinate, quasi asintotiche* $\sigma_{1,2}$; *in particolare si studiano alcuni casi con* $k=3$, 4.

1. Lo studio delle curve (o degli elementi differenziali di curve) quasi-asintotiche ha raggiunto un notevole sviluppo, specie per opera del BOMPIANI, che le ha introdotte in geometria proiettivo-differenziale, e del VILLA (1). Quest'ultimo ha affrontato il problema fondamentale di ricercare le V_k che posseggono curve quasi-asintotiche $\gamma_{r,s}$ (di indici assegnati) formanti totalità di tipo assegnato: lo stesso problema si pone quando si considerano varietà subordinate quasi-asintotiche di una V_k (2). In questa Nota ed in altre che seguiranno tratterò la predetta questione seguendo nella ricerca le linee direttive dei citati lavori del VILLA. Incomincio col considerare le quasi-asintotiche di indici più bassi $\sigma_{1,2}$ ed ho così modo di segnalare le principali difficoltà che si presentano nella ricerca.

(1) M. VILLA, *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche*, Note I e II « Rend. Acc. Naz. Lincei », S. VI, vol. XXVIII (1938) pp. 246,302. M. VILLA, *Ricerche sulle varietà* V_k *che posseggono* $\infty^{\delta} E_2$ *di* $\gamma_{1,3}$, *con particolare riguardo al caso* $k=4$, $\delta=8$, « Mem. Acc. Naz. Lincei », S. VI, vol. VII (1939) p. 373. M. VILLA, *Nuove ricerche nella teoria delle curve quasi-asintotiche*, « Annali di Mat. », S. IV, T. XVIII (1939). E. BOMPIANI, *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi*, Proc. Fifth Math Congr. Cambridge 1912, v. II, p. 24. E. BOMPIANI, *Geometria proiettiva di un'equazione a derivate parziali, lineare omogenea*, Note I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei » S. VI, vol XXIII (1938) p. 1-21. In quest'ultimo lavoro si troveranno citati altri lavori del BOMPIANI sull'argomento.

(2) Sull'argomento ricordiamo i seguenti lavori, nei quali si trovano i primi esempi di varietà subordinate quasi-asintotiche per una varietà: C. BOGDAN, *Sopra una classe di* V_3 *che ammettono una infinità di superficie quasi-asintotiche ecc.*, « Rend. Acc. Naz. Lincei, S. VI, vol. XXVII (1938). M. VILLA *Sulle superficie quasi-asintotiche della* V_4^6 *di* S_8 *che rappresenta le coppie di punti di due piani*, « Rend. Cl. Sc. R. Acc. It », S. VII, vol. I (1940). C. LONGO, *Sopra una classe di varietà che ammettono varietà subordinate quasi-asintotiche*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », S. VIII, vol. V (1948). G. VAONA, *Curve e superficie quasi-asintotiche delle varietà di Grassmann che rappresenta le rette di uno spazio lineare*, questo Bollettino, s. III, vol. IV (1949).

a differenza di quelle che si hanno nel caso delle curve quasi-asintotiche. Nelle Note seguenti passerò a trattare dei casi successivi, pervenendo alla caratterizzazione di alcune varietà.

2. Com'è ben noto [3] una V_h, subordinata di una data V_k, quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$ per la V_k, può esserlo di specie t (e si scrive perciò $\sigma_{1,2}{}^t$) con $1 \leq t \leq \tau = \binom{h+1}{2}$. Volendo ricercare le V_k che posseggono date totalità di V_h subordinate $\sigma_{1,2}{}^t$ (dati h e t) la trattazione analitica esige [4] che si determinino anzitutto le V_k che posseggono certe totalità di calotte h-dimensionali, del primo ordine $\sigma_h{}^1$, di $\sigma_{1,2}{}^t$ [5]. Incominciamo dunque col considerare il seguente problema:

Determinare le V_k *per le quali ogni calotta* $\sigma_h{}^1$ *è una calotta di* $\sigma_{1,2}{}^t$; ossia le V_k che posseggono $\infty^{k+h(k-h)}\sigma_h{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^t$. È questo il caso più semplice del problema di determinare le V_k che posseggono $\infty^\delta (k \leq \delta \leq k + h(k-h))$ calotte $\sigma_h{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^t$, che considereremo in seguito.

Sia

$$x = x(\tau_1, \dots, \tau_k) \tag{1}$$

il punto che descrive la V_k considerata; una V_h di V_k è data quando si assegnino le funzioni [6]

$$\tau_{h+l} = \tau_{h+l}(\tau_1, \dots, \tau_h). \qquad (l = 1, \dots, k-h) \tag{2}$$

(3) Ricordiamo che una V_h, subordinata di una V_k, dicesi quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ $(0 < r < s)$ della V_k quando lo spazio $S(r)$ — osculatore alla V_k, in un suo generico punto, e lo spazio $S(s)$ — osculatore alla V_k nello stesso punto sono congiunti da uno spazio di dimensione inferiore alla ordinaria; poichè la differenza può assumere diversi valori si rende necessaria l'introduzione della *specie* t, che è appunto il valore di quella differenza. La *specie* è stata introdotta dal VILLA nel lavoro citato in (2).

(4) Questo accade anche nel caso delle curve quasi-asintotiche (Cfr. VILLA op. cit. in (1)). Ma mentre nel caso delle curve queste esistono certamente se esistono loro elementi differenziali, nel caso delle V_h con $h > 1$ accade che si possano avere calotte σ_h di quasi-asintotiche senza che esistano V_h quasi-asintotiche. Questo risulterà chiaro dal seguito (n. 4).

(5) Per calotta $\sigma_h{}^1$ si intende in sostanza l'insieme di un punto di V_k e di un suo S_h tangente ivi. Diremo che una calotta $\sigma_h{}^1$ è di $\sigma_{1,2}{}^t$ quando è contenuta in una calotta $\sigma_h{}^2$ del secondo ordine il cui $S(2)$ — osculatore è congiunto allo S_k tangente ivi alla V_k da uno spazio di dimensione inferiore alla ordinaria di t unità.

(6) Per evitare di escludere qualche V_h subordinata della V_k occorerebbe adoperare una rappresentazione più generale. Tuttavia per scopi dimostrativi la rappresentazione scelta è sufficiente, come si vede con facili considerazioni.

Una calotta σ_h^1 di V_k è data quando si assegnino (in un dato punto di V_k) le $h(k-h)$ quantità $\tau^{(i)}_{h+l}$ $(i=1,\ldots h)$; la calotta è di $\sigma_{1,2}^t$ quando la matrice:

$$
(3) \qquad \left\| \begin{matrix} S(1) \\ \overset{(11)}{x} \\ \vdots \\ \overset{(ij)}{x} \\ \vdots \\ \overset{(hh)}{x} \end{matrix} \right\| \qquad (i,\, j=1,\ldots,h)
$$

ha caratteristica esattamente $c=k+\binom{h+1}{2}+1-t$ [7]. In (3), secondo le solite notazioni, $S(1)$ indica $k+1$ righe costituite da x ed i suoi k derivati primi (rispetto ai parametri τ) ed

$$
(4) \qquad \overline{x}^{(ij)}=x^{(ij)}+\sum_l x^{(i,h+l)}\tau^{(i)}_{h+l}+\sum_l x^{(j,h+l)}\tau^{(j)}_{h+l}+
$$
$$
+\sum_{l,m} x^{(h+l\ \ h+m)}\tau^{(i)}_{h+l}\tau^{(j)}_{h+m}; \qquad (l,\ m=1,\ldots k-h)
$$

essendo

$$
x^{(ij)}=\frac{\partial^2 x}{\partial\tau_i\,\partial\tau_j}.
$$

Se si vuole che ogni calotta σ_h di V_h sia di $\sigma_{1,2}^t$, la (3) dovrà essere di caratteristica c identicamente rispetto alle quantità $\tau^{(i)}_{h+l}$. Si osservi ora che, fissate comunque le predette quantità, l'eguagliare allo zero una matrice di $c+1$ righe estratta dalla (3) (le prime $k+1$ righe essendo formate da $S(1)$) significa imporre alla x di soddisfare ad una equazione di LAPLACE la cui quadrica associata passa doppiamente per lo S_{k-h-1} (di S_{k-1}) di equazioni

$$
(5) \qquad \theta_i+\sum_l \tau^{(i)}_{h+l}\,\theta_{h+l}=0 \qquad (i=1,\ldots,h:\ l=1,\ldots,k-h).
$$

Viceversa se si suppone che la V_k considerata soddisfi ad un certo sistema di equazioni di LAPLACE, dal quale si possono estrarre t equazioni linearmente indipendenti le cui quadriche associate passano doppiamente per la S_{k-h-1} di equazioni (5), le $\tau^{(i)}_{h+l}$ essendo quantità arbitrarie, si vede subito che quelle equazioni di LAPLACE costituiscono legami lineari fra le righe della matrice (3) tali da renderne la caratteristica eguale a c.

Possiamo pertanto concludere che:

Affinchè ogni calotta σ_h^1 di una V_k sia di $\sigma_{1,2}^t$ è necessario e

(7) Poichè le prime $h+1$ righe di (3) sono certamente indipendenti dovranno annullarsi (e ciò sarà sufficiente) le matrici con $c-1$ righe formate con le prime $k+1$ e $c-k-2$ delle rimanenti.

sufficiente che V_k *soddisfi ad un sistema di equazioni di Laplace tale che il sistema lineare delle quadriche associate contenga esattamente* ∞^{t-1} *quadriche che passano doppiamente per uno* S_{k-h-1} *generico dello* S_{k-1}.

Dal precedente enunciato si deduce il risultato, del resto immediato (8), relativo al caso in cui t assume il suo valore massimo $\tau = \binom{h+1}{2}$, e cioè che allora la V_k è uno spazio lineare S_k. Non ci indugiamo ad investigare i sistemi di cui si dice sopra e ci limitiamo ad alcune osservazioni. Se $h = k - 1$ si debbono considerare i sistemi di quadriche dello S_{k-1} che contengono ∞^{t-1} quadriche passanti doppiamente per un punto generico; si vede subito che questi sono: *a*) i sistemi ∞^{k+t-1}, *b*) i sistemi $\infty^{k+t-\rho-1}$ a matrice jacobiana identicamente nulla, di caratteristica $k - \rho$ $(1 \leq \rho \leq k-2)$. Un risultato del TERRACINI (9) assicura che. nel caso *b*) e per $t \leq \rho$, il sistema rappresenta una V_k la cui sezione iperpiana ha uno $S(2)$-osculatore di dimensione inferiore a quella ordinaria (10), pertanto:

Se una V_k *è tale che ogni sua calotta* $\sigma_{k-1}{}^1$ *sia di* $\sigma_{1,2}{}^t$ $\left(1 \leq t \leq \binom{k}{2}\right)$. *ma rappresenta meno di* $k+1$ *equazioni di Laplace, allora la sezione iperpiana generica della* V_k *considerata ha lo* $S(2)$*-osculatore di dimensione inferiore alla ordinaria.*

Le V_k di cui s'è detto ora sono state determinate dal TERRACINI (loc. cit. in (9)) per $k = 3$, 4.

3. Passiamo ora a considerare le V_k che posseggono ∞^δ calotte $\sigma_h{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^t$ essendo ora $\delta < k + h(k-h)$.

Se una V_k possiede esattamente ∞^δ calotte $\sigma_h{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^t$ la matrice (3) ha caratteristica $c = k + \binom{h+1}{2} + 1 - t$ per tutte le $\tau^{(i)}{}_{h+l}$ che soddisfano alle $d = k + h(k-h) - \delta$ relazioni (11)

$$F_s(\tau^{(1)}{}_{h+1}, \dots, \tau^{(h)}{}_k) = 0 \qquad (s = 1, \dots, d). \tag{6}$$

(8) Se t ha il suo valore massimo si vede subito che tutti gli E_1 di V_k sono E_1 di $\gamma_{1,2}$ e quindi V_k è un S_k. (Cfr. VILLA, la prima delle op. cit. in (1), nota I).

(9) A. TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*. Nota I e III, « Atti R. Acc. Sc. » Torino, voll. XLIX e LV (1913-14 e 1919-20).

(10) Se lo spazio (2)-osculatore ad una V_k ha dimensione ω e lo spazio (2)-osculatore alla sua sezione iperpiana generica ha dimensione ω', è $\omega' = \frac{1}{2}(k-1)(k+2)$ per $\omega > \frac{1}{2}(k-1)(k+2)+1$ ed $\omega' = \omega - 1$ per $\omega \leq \frac{1}{2}(k-1)(k+2) + 1$, *in generale* (Cfr. TERRACINI, op. cit. in (9)).

Semplici ragionamenti, analoghi e quelli relativi al caso $d = 0$, che tralasciamo per brevità, permettono di affermare che:

Affinchè una V_k *possegga* ∞^δ *calotte* $\sigma_h{}^1$ *di* $\sigma_{1,2}{}^t$ *è neces ario e sufficiente che rappresenti un sistema di equazioni di Laplace avente un sistema lineare di quadriche associate tale che gli* S_{k-h-1} *che sono doppi per* ∞^{t-1} *quadriche del sistema formano una totalità* $\infty^{\delta-k}$.

Questa proposizione permette di costruire tutti i possibili tipi di sistemi di equazioni di LAPLACE a cui debbono soddisfare la V_k aventi la proprietà considerata; inoltre permette di conoscere quale forma debbano necessariamente avere le relazioni (6) ([12]). Tutto ciò però subordinatamente ad un esame dei sistemi lineari di quadriche che presenta non poche difficoltà per il gran numero dei casi che si possono avere.

Non possiamo in questa breve Nota intraprendere lo studio predetto nè soffermarci sulle numerose proposizioni che si potrebbero ricavare da quella enunciata; ci limiteremo ad illustrare alcuni casi particolari.

Per $k = 3 (V_3)$ ed $h = 2$, può essere $t = 1, 2, 3$ e $\delta = 3, 4$ ($\delta = 5$ è il caso considerato nel num. precedente). Per $\delta = 3$ si hanno i seguenti tipi di sistemi lineari di coniche nel caso $t = 1$:

a) fascio di coniche (che non contenga rette doppie nè sia tutto di coniche spezzate),

b) coniche spezzate in due rette distinte,

per $\delta = 4$ e $t = 1$ si hanno:

a) sistemi ∞^2 generici coniche.

b) fasci di coniche spezzate (con una retta fissa) o contenenti retta doppia,

c) retta doppia.

Le V_3 relative ai casi sopra menzionati sono state investigate (in parte) da P. BUZANO ([13]) ed U. LEVI.

Sempre per $k = 3$, $h = 2$ supponiamo ora che sia $t = 3$. Si vede subito che non può in tal caso essere $\delta = 4$ e per $\delta = 3$ si hanno i seguenti tipi di sistemi di coniche:

a) sistema ∞^2 delle coppie di rette di un fascio e sistemi che

([11]) Relazioni che contengono naturalmente anche le $\tau_i (i = 1, \ldots, k)$.

([12]) Questo ha interesse anche per lo studio locale delle V_k e permetterebbe certo di dare riferimenti proiettivi intrinseci per quello studio.

([13]) P. BUZANO, *Varietà a tre dimensioni integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari e omogenee*, « Mem. R. Acc. Sci. ». Torino, S. 2, T. 69 (I), (1938-39). U. LEVI, *Intorno alla varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e del 3° ordine*, « Rend. Sem. Mat. Univ. » Padova, vol. IV (1933) p. 27 e vol. V (1934) p. 148.

lo contengono. In questo caso vi è, per ogni punto della V_3 una sola calotta $\sigma_2{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^3$.

b) sistema ∞^4 di coniche che ammette una coppia di punti coniugati. In questo caso vi sono, per ogni punto delle V_3, due calotte $\sigma_2{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^3$.

Si vede facilmente che per k qualunque, $h = k - 1$ e $t = \binom{k}{2}$ si hanno risultati analoghi agli ultimi enunciati.

Per $k = 4$ ed $h = 2$ sia $t = 3$, $\delta = 4$ allora si hanno i sistemi:

a) sistema ∞^2 delle coppie di piani di un fascio e sistemi che lo contengono,

a) sistema ∞^4 contenente le coppie di piani di due fasci ad assi incidenti, o ∞^5, se gli assi sono sghembi; le relative V_4 hanno rispettivamente una sola o due calotte $\sigma_2{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^3$ per ogni punto.

Più avanti riprenderemo uno degli esempi ora illustrati.

4. Per terminare dobbiamo trattare il problema di determinare le V_k che posseggono, non soltanto calotte $\sigma_h{}^1$, ma varietà subordinate V_h che siano $\sigma_{1,2}{}^t$. Quelle V_k sono da ricercarsi fra quelle di cui s'è detto nel n. 3 e precisamente sono quelle per le quali le relazioni (6), equazioni alle derivate parziali del primo ordine nelle funzioni incognite $\tau_{h+l}(\tau_1, \dots, \tau_h)$, sono integrabili. Si osserverà pertanto che quando sia $d \leq k - h$ esisteranno certo V_h subordinate e dipenderanno da funzioni arbitrarie; se invece $d > k - h$ dovranno essere soddisfatte condizioni di integrabilità per le (6) e pertanto, in generale, si avranno soltanto calotte di $\sigma_{1,2}$ e non varietà subordinate. Un metodo per determinare le V_k in discorso è comunque il seguente:

1) ricercare i diversi tipi di sistemi lineari di quadriche relativi alle V_k che posseggono i sistemi di calotte $\sigma_h{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^t$ del caso che si vuol considerare,

2) ottenere le relazioni (6) e scriverne le condizioni di integrabilità. Queste, insieme con le equazioni di Laplace, dedotte dai sistemi ottenuti prima, permetteranno di determinare la V_k.

In pratica il metodo indicato presenta gravi difficoltà di calcolo, salvo in qualche caso. A titolo di esempio applichiamo ora quel metodo alla determinazione della V_3 che posseggono ∞^1 superficie $\sigma_{1,2}{}^3$. Dal n. 3 sappiamo che una tale V_3 possiede ∞^3 calotte $\sigma_2{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^3$ e pertanto soddisfa ad un sistema di equazioni di Laplace avente un sistema lineare di coniche associate contenente la ∞^2 coppie di rette di un fascio. Siano dunque [14]

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_1(\tau_1, \tau_2; \tau_3)\theta_3 \\ \theta_2 &= \alpha_2(\tau_1, \tau_2; \tau_3)\theta_3 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

([14]) A meno di un eventuale scambio degli indici 1, 2, 3, se quel punto fosse improprio (cioè avesse $\theta_3 = 0$) nel piano θ_1, θ_2.

le coordinate del centro di quel fascio. Fra le equazioni di LAPLACE a cui deve soddisfare le V_3 vi sono le tre [15]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial\tau_3}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\tau_j} + \alpha_j \frac{\partial x}{\partial\tau_3}\right) \backsim 0 \qquad (i,\ j = 1,\ 2). \tag{8}$$

Le calotte $\sigma_2{}^1$ di $\sigma_{1,2}{}^3$ uscenti da ciascun punto di V_3 sono dunque date da

$$\begin{cases} \tau^{(1)}{}_3 = \alpha_1(\tau_1,\ \tau_2;\ \tau_3) \\ \tau^{(2)}{}_3 = \alpha_2(\tau_1,\ \tau_2;\ \tau_3) \end{cases}; \tag{9}$$

la condizione di integrabilità di questo sistema è notoriamente [16]

$$\begin{aligned} &[\tau^{(1)}{}_3 - \alpha_1,\ \tau^{(2)}{}_3 - \alpha_2] = \\ &= \frac{\partial\alpha_1}{\partial\tau_2} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial\tau_1} + \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial\tau_3} - \alpha_1 \frac{\partial\alpha_2}{\partial\tau_3} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

La (10) è la condizione di completezza del sistema

$$\frac{\partial F}{\partial\tau_1} + \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial\tau_3} = \frac{\partial F}{\partial\tau_2} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial\tau_3} = 0; \tag{11}$$

assumendo come nuovo parametro $\sigma_3(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$ un integrale di (11) e lasciando immutati gli altri due, il sistema (8) diventa

$$x^{(11)} \backsim x^{(12)} \backsim x^{(22)} \backsim 0. \tag{12}$$

In altri termini la condizione di integrabilità (10), se soddisfatta, permette di assumere le ∞^1 superficie $\sigma_{1,2}{}^3$ come superficie $\tau_3 = \text{cost.}$

È noto che se le equazioni (12), alle quali soddisfa la V_3, costituiscono un sistema chiuso, esse esprimono [17] che le superficie $\tau_3 = \text{cost.}$ sono piani. La V_3 è allora una ∞^1 di piani di tipo qualsiasi. Se invece la (12) non costituiscono un sistema chiuso le superficie $\tau_3 = \text{cost.}$, che sono le $\sigma_{1,2}{}^3$ delle V_3, possono non essere piani. Ma poichè lo $S(2)$-osculatore a quelle superficie è uno S_3 esse sono allora rigate sviluppabili o coni pertanto la V_3 è una rigata. Dalle condizioni di integrabilità delle (12) si deduce poi che essa è sviluppabile; si possono assumere le rette della V_3 come linee τ_1 ed essa soddisfa allora ad un sistema di equazioni di LAPLACE fra le quali

[15] Col segno $\backsim$ si indica che il primo membro differisce dallo zero per una espressione lineare omogenea nella x e le sue derivate prime.

[16] Cfr. E. GOURSAT, *Equations aux dérivées partielles du premier ordre*, Parigi, 1921.

[17] Cfr. A. TERRACINI, op. cit. [9], Nota I.

vi sono le:

$$(13)\qquad \begin{cases} x^{(11)} = 0 \\ x^{(12)} = \alpha x^{(2)} + \beta x^{(3)} + \gamma x^{(1)} + \delta x \\ x^{(13)} = \alpha_1 x^{(2)} + \beta_1 x^{(3)} + \gamma_1 x^{(1)} + \delta_1 x \\ x^{(22)} = \alpha_2 x^{(2)} + \beta_2 x^{(3)} + \gamma_2 x^{(1)} + \delta_2 x \end{cases} \qquad (\beta_2 \neq 0).$$

Sfruttando le condizioni di integrabilità delle (13) si vede senza difficoltà che se le prime tre equazioni costituiscono un sistema chiuso la V_3 è un cono proiettante una superficie che possiede un sistema di asintotiche $\gamma_{1,2}$. In caso contrario, escluso il caso che la V_3 sia un S_3, il sistema (13) deve avere la forma:

$$(13')\qquad \begin{cases} x^{(11)} = 0 \\ x^{(12)} = \alpha x^{(2)} + \gamma x^{(1)} + \delta x \\ x^{(13)} = \alpha_1 x^{(2)} + \alpha x^{(3)} + \gamma_1 x^{(1)} + \delta_1 x \\ x^{(22)} \backsim 0. \end{cases} \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

Le V_3 integrali sono rigate sviluppabili che posseggono una sola superficie focale sulla quale le generatrici (delle superficie sviluppabili della V_3) inviluppano un sistema di curve $\gamma_{1,2}$.

Concludendo abbiamo che:

Le V_3 *che posseggono un sistema* ∞^1 *di superficie* $\sigma_{1,2}{}^3$ *quasi-asintotiche sono di uno dei tipi seguenti:*

a) V_3 *luogo di* ∞^1 *piani,*

b) V_3 *rigate sviluppabili con una unica superficie focale possedente un sistema* ∞^1 *di* $\gamma_{1,2}$ *(cioè soddisfacente ad una equazione di Laplace di tipo parabolico).*

c) V_3 *coni proiettanti una superficie possedente un sistema* ∞^1 *di* $\gamma_{1.2}$.

Inoltre si ha che:

Le uniche V_3 *che posseggono due sistemi* ∞^1 *di superficie* $\sigma_{1,2}{}^3$ *sono i coni di* S_4.

([18]) Osserviamo che le eventuali V_{k-1} di una V_k, che siano varietà $\sigma_{1,2}$ di specie massima per la V_k e nell'ipotesi che questa varietà ne possegga un sistema ∞^1, sono necessariamente *spazi lineari* S_{k-1} *oppure* ∞^1 *di* S_{k-2} *sviluppabili ordinarie.* Ciò risulta dal fatto che lo S(2)-osculatore alla V_{k-1} deve essere un S_k. (Cfr. TERRACINI, *Sulle* V_k *che rappresentano più di* $\frac{1}{2}k(k-1)$ *equazioni di Laplace linearmente indipendenti* « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. XXXIII (1912) p. 176.).