Bollettino Unione Matematica Italiana

Roberto Conti

Un teorema di confronto per le equazioni alle differenze finite, lineari, del 2° ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 208–213.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_208_0>

Un teorema di confronto per le equazioni alle differenze finite, lineari, del 2° ordine.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze).

Sunto. - *Il contenuto di questa Nota è riassunto nel seguente n. 1.*

1. La lettura di un recente lavoro di M. BIERNACKI contenente, fra l'altro, un teorema di confronto per equazioni alle differenze finite del 2° ordine, lineari [1], mi ha indotto a ricercare se valga per tali equazioni un teorema di confronto analogo a quello classico di STURM per le equazioni differenziali (lineari, omogenee, del 2° ordine).

(8) J. DE SIEBENTHAL, « Comptes Rendus Acad. Sci. ». Paris, 232, (1951), pag. 1892.

(1) Cfr. M. BIERNACKI, *Sur l'équation* $\Delta^2 y/h^2 + A(x)y = 0$, « Prace Matematyczne », t. 47, (1949), pag. 49-60; in particolare Teor. II-*a* e *b*.

In effetti, seguendo (nn. 2 e 3) un procedimento dimostrativo parallelo a quello svolto nei trattati [2] si ottiene dapprima una relazione (formula (B) del n. 3) che traduce abbastanza fedelmente in termini di differenze finite la nota identità integrale di PICONE [3]. Tale relazione serve a dimostrare il teorema di confronto suaccennato (n. 4); successivamente (n. 5) si mettono in rilievo alcuni punti in cui il nostro enunciato differisce, per forza di cose, da quello di STURM.

2. Si considerino le due equazioni alle differenze finite del 2° ordine. lineari, omogenee

$$\text{(A)} \qquad \Delta[\theta(x)\Delta y(x)] - Q(x)y(x+h) = 0,$$

$$\text{(A}_1\text{)} \qquad \Delta[\theta_1(x)\Delta z(x)] - Q_1(x)z(x+h) = 0,$$

dove h è una costante positiva assegnata, e dove $\Delta f(x) \equiv f(x+h) - f(x)$.

Siano $Q(x)$, $Q_1(x)$ due funzioni definite al variare di x in un certo intervallo (a, b), eventualmente illimitato, e siano $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ altre due funzioni definite in $(a, b+h)$ e ivi positive.

Detta $y(x)$ una qualunque soluzione della (A), $z(x)$ una qualunque soluzione della (A$_1$), si consideri la funzione [4]

$$\varphi(x) = \theta(x)\Delta y(x)y(x) - \theta_1(x)\Delta z(x)\frac{[y(x)]^2}{z(x)},$$

la quale è definita in ogni punto x di (a, b) in cui sia $z(x) \neq 0$.

Se supponiamo, inoltre, x tale da aversi $z(x)z(x+h) \neq 0$ allora vale la relazione

$$\text{(2)} \qquad \Delta\varphi(x) = [Q(x) - Q_1(x)][y(x+h)]^2 + [\theta(x) - \theta_1(x)][\Delta y(x)]^2 + \\ + \theta_1(x)\frac{[z(x)\Delta y(x) - y(x)\Delta z(x)]^2}{z(x)z(x+h)}.$$

Per provare la (2) basta osservare che in virtù delle (A) ed (A$_1$)

(2) Cfr. ad es., G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte I, (Bologna, 1941), pag. 182 e segg.

(3) M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare del secondo ordine*, » Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (1), 11, (1910), (pagg. 1-141), pag. 20; cfr. anche G. SANSONE, loc. cit., pag. 183.

(4) Va rilevato che, a causa della (A), la quale, scritta per esteso, diventa $\theta(x+h)[y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)] + [\theta(x+h) - \theta(x)][y(x+h) - y(x)] - Q(x)y(x+h) = 0$, la y deve essere definita in $(a, b+2h)$; lo stesso dicasi della z.

si ha

$$\Delta\varphi(x) = [Q(x) - Q_1(x)][y(x+h)]^2 + [\theta(x) - \theta_1(x)][\Delta y(x)]^2 +$$
$$+ \theta_1(x)\left[[\Delta y(x)]^2 - \Delta z(x)\Delta\frac{[y(x)]^2}{z(x)}\right],$$

ed applicare poi a quest'ultima [ ] le regole elementari del calcolo delle differenze.

3. Sia ora α un numero $\geq a$ ed esista un intero n tale che $b - \alpha \geq nh$; poniamo per brevità $\beta = \alpha + nh$, (quindi $\beta \leq b$) ed osserviamo subito che dovremo supporre $n > 2$ poichè come è noto, e come è del resto evidente, *si possono sempre assegnare completamente ad arbitrio i valori che una soluzione di un'equazione lineare del* 2^o *ordine alle differenze finite assume in un intervallo di ampiezza* $\leq 2h$.

Ammettiamo poi che $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$, $y(x)$, $z(x)$ siano funzioni continue per $\alpha \leq x \leq \beta$ e che sia

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0 \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\alpha+}\frac{[y(x)]^2}{z(x)} = \lim_{x\to\beta-}\frac{[y(x)]^2}{z(x)} = 0, \tag{4}$$

Esistano inoltre due numeri $\delta > 0$, $\delta' > 0$ tali che si abbia $z(x) \neq 0$ per $\alpha < x < \alpha + \delta$, $\beta - \delta' < x < \beta$; potremo allora porre

$$\varphi(x) \equiv \lim_{x\to\alpha+}\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(\beta) \equiv \lim_{x\to\beta-}\varphi(x) = 0.$$

Ammettiamo infine che sia

$$z(x)z(x+h) \neq 0 \quad \text{per} \quad \alpha < x < \alpha + \delta, \quad \beta - h - \delta' < x < \beta - h. \tag{5}$$

$$z(\alpha + ih) \neq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{6}$$

Da quest'ultima condizione segue intanto la validità della (2) per $x = \alpha + ih$, $(i = 1, 2, \dots, n-2)$, mentre dalle (5) segue la validità della (2) stessa per $\alpha < x < \alpha + \delta$, $\beta - \delta' < x < \beta$ e poichè

$$\theta_1(x)\frac{[z(x)\Delta y(x) - y(x)\Delta z(x)]^2}{z(x)z(x+h)} =$$
$$= \theta_1(x)\left[z(x)\frac{[y(x+h)]^2}{z(x+h)} - 2y(x)y(x+h) + z(x+h)\frac{[y(x)]^2}{z(x)}\right],$$

avendo presenti le (3) e (4) otteniamo

$$\Delta\varphi(\alpha) = [Q(\alpha) - Q_1(\alpha)][y(\alpha+h)]^2 + [\theta(\alpha) - \theta_1(\alpha)][y(\alpha+h)]^2 +$$
$$+ \theta_1(\alpha)z(\alpha)\frac{[y(\alpha+h)]^2}{z(\alpha+h)},$$

e analogamente

$$\Delta\varphi(\beta - h) = [\theta(\beta - h) - \theta_1(\beta - h)][y(\beta - h)]^2 + \theta_1(\beta - h)z(\beta)\frac{[y(\beta-h)]^2}{z(\beta - h)}.$$

Dunque la (2) può scriversi per $x = \alpha + ih$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. D'altronde

$$\Delta\varphi(\alpha) + \Delta\varphi(\alpha + h) + \dots + \Delta\varphi(\beta - h) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = 0,$$

e si ha infine l'identità

$$\text{(B)} \qquad \sum_0^{n-1}{}_i\, [Q(\alpha + ih) - Q_1(\alpha + ih)][y(\alpha + ih + h)]^2 +$$
$$+ \sum_0^{n-1}{}_i\, [\theta(\alpha + ih) - \theta_1(\alpha + ih)][\Delta y(\alpha + ih)]^2 +$$
$$+ \theta_1(\alpha)z(\alpha)\frac{[y(\alpha + h)]^2}{z(\alpha + h)} + \theta_1(\beta - h)z(\beta)\frac{[y(\beta - h)]^2}{z(\beta - h)} +$$
$$+ \sum_1^{n-2}{}_i\, \theta_1(\alpha + ih)\frac{[z(\alpha + ih)\Delta y(\alpha + ih) - y(\alpha + ih)\Delta z(\alpha + ih)]^2}{z(\alpha + ih)z(\alpha + ih + h)} = 0.$$

4. Supponiamo adesso che sia

$$\text{(7)} \qquad Q(\alpha + ih) \geq Q_1(\alpha + ih) \qquad i = 0, 1, \dots, n-1;$$
$$\text{(8)} \qquad \theta(\alpha + ih) \geq \theta_1(\alpha + ih) > 0, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1;$$
$$\text{(9)} \qquad y(\alpha + ih) \neq 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Allora o non è soddisfatta una almeno delle (5), (6) oppure queste sono verificate entrambe e quindi vale la (B). In tal caso se in una almeno delle (7), (8) vale il segno $>$ dovrà esistere un intero j almeno $(0 \leq j \leq n-1)$ tale che sia

$$\text{(10)} \qquad z(\alpha + jh)z(\alpha + jh + h) < 0,$$

e quindi per la continuità di z ci sarà almeno un ξ, $\alpha + jh < \xi < \alpha + jh + h$, tale che $z(\xi) = 0$. Infine se, sussistendo le (5), (6) e quindi la (B), nelle (7) ed (8) vale sempre il segno $=$, (il che accade se ad es. la (A) e la (A_1) sono la medesima equazione), allora o si conclude ancora con la (10) oppure debbono valere insieme le

$$z(\alpha) = z(\beta) = 0$$
$$z(\alpha + ih)\Delta y(\alpha + ih) - y(\alpha + ih)\Delta z(\alpha + ih) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n-2;$$

o, ciò che è lo stesso, a causa delle (3), le

$$z(\alpha + ih)y(\alpha + ih + h) - y(\alpha + ih)z(\alpha + ih + h) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ciò significa che esistono due costanti c_1 e c_2, non nulle entrambe, tali che

$$c_1 y(\alpha + ih) + c_2 z(\alpha + ih) = 0, \qquad i = 0, 1, \dots . n - 1; \tag{11}$$

ossia che le due funzioni $y(x)$, $z(x)$ sono linearmente dipendenti nell'insieme di punti $x = \alpha + ih$, $(i = 0, 1, \dots, n - 1)$.

Possiamo pertanto riassumere i risultati trovati nel seguente

TEOREMA DI CONFRONTO. – *Siano* $y(x)$, $z(x)$ *due soluzioni continue per* $\alpha \leq x \leq \beta = \alpha + nh$ $(n \geq 3)$ *delle*

$$\Delta[\theta(x)\Delta y(x)] - Q(x)y(x + h) = 0, \tag{A}$$

$$\Delta[\theta_1(x)\Delta z(x)] - Q_1(x)z(x+h) = 0, \tag{A$_1$}$$

rispettivamente.

La y *e la* z *siano linearmente indipendenti nell'insieme dei punti* $x = \alpha + ih$, $(i = 0, 1, \dots, n - 1)$ (5) *e soddisfino le*

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0 ; \tag{3}$$

$$\lim_{x \to \alpha+} \frac{[y(x)]^2}{z(x)} = \lim_{x \to \beta-} \frac{[y(x)]^2}{z(x)} = 0 ; \tag{4}$$

$$y(\alpha + ih) \neq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{9}$$

Se $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$ *sono funzioni continue in* (α, β) *soddisfacenti le*

$$Q(\alpha + ih) \geq Q_1(\alpha + ih), \qquad i = 0, 1, \dots, n - 1; \tag{7}$$

$$\theta(\alpha + ih) \geq \theta_1(\alpha + ih) > 0. \quad i = 0, 1, \dots, n - 1; \tag{8}$$

allora esiste almeno un punto interno all'intervallo (α, β) *nel quale la* $z(x)$ *si annulla.*

5. Concludiamo con qualche osservazione.

Dal ragionamento fatto appare che l'ipotesi della continuità delle y, z, θ, θ_1, Q, Q_1, è sovrabbondante; basterebbe, ad es., supporre la continuità di queste funzioni in intorni opportuni dei punti α, $\alpha + h$, $\beta - h$, β e supporre che la $z(x)$ sia, fuori di questi intorni, dotata della proprietà (di DARBOUX) di assumere in ogni intervallo $(\bar{\alpha}. \bar{\beta})$ almeno una volta ciascuno dei valori compresi fra $z(\bar{\alpha})$ e $z(\bar{\beta})$.

La condizione (4) non appare nell'enunciato di STURM poichè una soluzione di un'equazione differenziale (lineare omogenea del 2° ordine) non può avere in un punto uno zero di ordine superiore al primo (6).

(5) Non esista, cioè alcuna coppia di costanti non nulle c_1, c_2 per cui valgono le (11).

(6) G. SANSONE, loc. cit, pag. 178.

I due punti α e β non sono necessariamente due zeri consecutivi della y, cioè non è detto che β debba essere il primo punto « coniugato » a destra di α e in ciò l'enunciato del nostro teorema è meno preciso di quello del teorema di STURM, nè potrebbe essere diversamente.

Infine è ovvio che non può valere per le soluzioni di un'equazione alle differenze (A) un « teorema di separazione degli zeri » analogo a quello che si ricava dal teorema di STURM per le equazioni differenziali (7). Le cose vanno diversamente, come è ben noto, se si considerano equazioni alle differenze con variabile x intera (cioè relazioni ricorrenti) (8).