Bollettino Unione Matematica Italiana

Filippo Sibirani

Sopra alcuni metodi per il calcolo del valore attuale della rendita vitalizia unitaria frazionata.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 226–231.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_226_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Sopra alcuni metodi per il calcolo del valore attuale della rendita vitalizia unitaria frazionata.

Nota di Filippo Sibirani (a Bologna).

Sunto. - *Si mettono in evidenza due metodi elementari per il calcolo del valore attuale della rendita vitalizia frazionata che portano ad un risultato assai prossimo a quello che si ottiene col sussidio del Calcolo integrale.*

1. Il valore attuale della rendita vitalizia unitaria frazionata, cioè della rendita vitalizia il cui termine è $1/k$ di lira pagato alla fine di ciascun $1/k$ di anno a cominciare da $1/k$ di anno dal momento attuale ad un individuo di attuale età x, è

$$a_x^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k(\omega-x)} v^{h/k} \frac{l_{x+h/k}}{l_x}, \tag{1}$$

essendo ω l'estrema età della tavola di mortalità di cui si fa uso. Poichè i numeri l_x sono dati dalle tavole solo per x intero, occorre calcolare la somma (1) mediante qualche procedimento di approssimazione.

Con un metodo, esposto al n. 2, che può essere usato anche nella scuola secondaria, si perviene al valore approssimato

$$a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2k}.$$

Tuttavia é evidente che il risultato presenta il difetto che la differenza fra il valore attuale della rendita frazionata $a_x^{(k)}$ e quello della rendita unitaria annua a_x non dipende nè dall'età del vitaliziato nè dal tasso.

Nelle scuole superiori, usando di una formula di approssimazione per il calcolo di un integrale definito dovuta ad EULERO, si perviene al risultato

$$a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2k} + \frac{k^2-1}{12k^2}(\delta + \mu_x),$$

ove δ è il tasso istantaneo di capitalizzazione e μ_x il tasso istantaneo di mortalità. È manifesto che questo metodo non può essere usato nella scuola secondaria.

Ai nn. 3 e 4 esporrò due metodi, che possono essere usati nella scuola secondaria, i quali portano allo stesso risultato che numericamente si avvicina all'ultimo indicato e non ha perciò il difetto riscontrato nel primo.

2. Si calcola $v^{n+h/k}\frac{l_{x+n+h/k}}{l_x}$, con x ed n interi ed $h < k$. interpolando linearmente fra $v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ e $v^{n+1}\frac{l_{x+n+1}}{l_x} = \frac{D_{x+n+1}}{D_x}$, cioè ponendo

$$v^{n+h/k}\frac{l_{x+n+h/k}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{h}{k}\,\frac{D_{x+n} - D_{x+n+1}}{D_x}.$$

La somma (1) diviene allora

$$\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\omega-x}\sum_{h=1}^{k} v^{n+h/k}\frac{l_{x+n+h/k}}{l_x} = \sum_{n=0}^{\omega-x}\left\{\frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{k+1}{2k}\,\frac{D_{x+n} - D_{x+n+1}}{D_x}\right\}$$

e poichè

$$\sum_{n=0}^{\omega-x}\frac{D_{x+n}}{D_x} = a_x + 1; \qquad \sum_{n=0}^{\omega-x}\frac{D_{x+n} - D_{x+n+1}}{D_x} = 1,$$

si ha in definitiva

$$a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2k}. \tag{2}$$

3. Per calcolare $v^{n+h/k}\frac{l_{x+n+h/k}}{l_x}$, anzichè interpolare fra $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ e $\frac{D_{x+n+1}}{D_x}$, calcoliamo $l_{x+n+h/k}$ interpolando linearmente fra l_{x+n} e l_{x+n+1}; ponendo $l_{x+n} - l_{x+n+1} = d_{x+n}$ (numero dei morti fra le età $x+n$ e $x+n+1$) si ha

$$l_{x+n+h/k} = l_{x+n} - \frac{h}{k}\,d_{x+n}.$$

Questo procedimento equivale manifestamente a supporre che in ogni intervallo annuo $(x, x+1)$ le morti si distribuiscano uniformemente. Con ciò la (1) diviene

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\omega-x} v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}\sum_{h=1}^{k} v^{h/k} - \frac{1}{k^2}\sum_{n=0}^{\omega-x} v^n \frac{d_{x+n}}{l_x}\sum_{h=1}^{k} h v^{h/k} = \\
&= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+n}}{D_x}\sum_{h=1}^{k} v^{h/k} - \frac{r}{h^2}\sum_{n=0}^{\omega-x} \frac{C_{x+n}}{D_x}\sum_{h=1}^{k} h v^{h/k}.
\end{aligned}
$$

Ma è

$$
\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{k} v^{h/k} = \frac{1}{k} v^{1/k}\frac{1-v}{1-v^{1/k}} = \frac{iv}{k(r^{1/k}-1)} = \frac{iv}{j_k},
$$

ove j_k è il tasso convertibile k volte in un anno relativo al tasso annuo i; di più [1]

$$
\frac{1}{k^2}\sum_{h=1}^{k} h v^{h/k} = \frac{v^{1/k}(1-v)}{k^2(1-v^{1/k})^2} - v\frac{v^{1/k}}{k(1-v^{1/k})} = \frac{ivr^{1/k}}{j_k^{\,2}} - \frac{v}{j_k}
$$

$$
\sum_{n=0}^{\omega-x}\frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x-1}}{D_x} = \mathrm{a_x}; \qquad \sum_{n=0}^{\omega-x}\frac{C_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x},
$$

essendo $\mathrm{a_x}$ il valore attuale della rendita vitalizia unitaria annua anticipata e $\dfrac{M_x}{D_x}$ il premio unico puro atto ad assicurare in caso di morte a vita intera 1 lira ad un individuo di attuale età x.

Tenendo conto di ciò la (3) dà

$$
a_x^{(k)} = \frac{iv}{j_k}\,\mathrm{a_x} - \frac{ir^{h/k} - j_k}{j_k^{\,2}}\,\frac{M_x}{D_x}.
$$

È noto che è

$$
\frac{M_x}{D_x} = 1 - iv\mathrm{a_x},
$$

da cui

$$
\mathrm{a_x} = \frac{1}{iv}\left(1 - \frac{M_x}{D_x}\right),
$$

(1) Poichè ho detto che i metodi esposti ai nn. 3 e 4 possono essere usati nella scuola secondaria, osservo che ciò che un insegnante di Istituto tecnico può non aver avuto occasione di insegnare è il calcolo di $\sum\limits_{h=1}^{k} hv^{h/k}$. Ma esso si fa semplicemente osservando che

$$
(1 - v^{1/k})\sum_{h=1}^{k} hv^{h/k} = \sum_{h=1}^{k} v^{h/k} - kv^{\frac{k+1}{k}}
$$

da cui si trae

$$
\sum_{h=1}^{k} hv^{h/k} = \frac{v^{1/k}(1-v)}{(1-v^{1/k})^2} - \frac{kv^{\frac{k+1}{k}}}{1-v^{1/k}}.
$$

perciò, sostituendo, si ottiene in definitiva

$$(4)\qquad a_x^{(k)} = \frac{1}{j_k} - \frac{ir^{1/k}}{j_k^2}\,\frac{M_x}{D_x}.$$

4. Allo stesso risultato si può pervenire in altra maniera che, dal punto di vista didattico, può essere considerato più semplice: alludo al metodo cosidetto della società fittizia.

Supponiamo che tutti gli l_x individui viventi all'età x secondo la tavola di cui si fa uso versino una egual somma Y la quale deve essere tale da permettere di dare alla fine di ciascun $1/k$ di anno $1/k$ di lira ai sopravviventi ed in guisa che all'estinzione di tutti gli l_x individui (secondo quanto è previsto dalla tavola di mortalità) nulla sia rimasto e nulla sia mancato. La somma incognita Y è il valore di $a_x^{(k)}$. Al momento attuale in cui gli l individui versano ciascuno Y lire si ha il capitale Yl_x, il quale deve essere eguale alla somma dei valori attuali di tutte le percezioni che gli l_x individui hanno durante la loro vita.

I d_{x+n} individui che muoiono fra l'età $x+n$ e l'età $x+n+1$ percepiscono fra le età x ed $x+n$ una rendita certa di kn termini ciascuno di $1/k$ di lira pagato alla fine di ciascuna $1/k$ di anno. Come è noto, se $a_{\overline{n}|}$ rappresenta il valore attuale della rendita certa unitaria annua di n termini, il valore attuale $a_{\overline{n}|}^{(k)}$ della rendita certa unitaria frazionata è dato da $\frac{i}{j_k}a_{\overline{n}|}$. Pertanto il valore attuale di quanto i d_{x+n} anzidetti individui percepiscano fra le età x, $x+n$ è

$$(5)\qquad \frac{i}{j_k}a_{\overline{n}|}d_{x+n} = \frac{i}{j_k}\,\frac{1-v^n}{i}\,d_{x+n} = \frac{1}{j_k}d_{x+n} - \frac{1}{j_k}v^n d_{x+n}.$$

Per calcolare il valore attuale di quanto gli stessi d_{x+n} individui percepiscono fra l'età $x+n$ e la loro morte supponiamo che le morti si distribuiscano uniformemente nell'anno, cioè che dei d_{x+n} individui i viventi all'età $x+n+h/k$ (con $h<k$) siano in numero di $(1-h/k)d_{x+n}$.

Ciò posto, il valore attuale che ora si vuol calcolare è [2]

$$(6)\qquad \frac{1}{k}v^n d_{x+n}\sum_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{k}\right)v^{h/k} = \left(\frac{r}{j_k} - \frac{ir^{1/k}}{j_k}\right)v^{n+1}d_{x+n}.$$

[2] Conviene per il calcolo sostituire a $\sum_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{k}\right)v^{h/k}$ l'espressione equivalente $\sum_{h=1}^{k}\left(1-\frac{h}{k}\right)v^{h/k}$.

Sommando i valori dati dalle (5) e (6) si ha

$$\frac{1}{j_k} d_{x+n} - \frac{ir^{1/k}}{j_k^2} v^{n+1} d_{x+n}$$

che rappresenta il valore attuale delle percezioni dei d_{x+n} individui dall'età x alla loro morte. Il valore attuale delle percezioni di tutti gli l_x individui fino alla loro totale estinzione è perciò

$$\sum_{n=0}^{\omega-x}\left(\frac{1}{j_k} d_{x+n} - \frac{ir^{1/k}}{j_k^2} v^{n+1} d_{x+n}\right) = \frac{l_x}{j_k} - \frac{ir^{1/k}}{j_k^2}\sum_{n=0}^{\omega-x} v^{n+1} d_{x+n}$$

e quindi si ha l'equazione

$$Y l_x = \frac{l_x}{j_k} - \frac{ir^{1/k}}{j_k^2}\sum_{n=0}^{\omega-x} v^{n+1} d_{x+n},$$

da cui

$$Y = \frac{1}{j_k} - \frac{ir^{1/k}}{j_k^2}\sum_{n=0}^{\omega-x} \frac{v^{n+1} d_{x+n}}{l_x}$$

e in definitiva

(4) $$a_x^{(k)} = \frac{1}{j_k} - \frac{ir^{1/k}}{j_k^2}\frac{M_x}{D_x}.$$

5. Se $f(t)$ è una funzione definita per $t \geq a$ ed è $f(t) = 0$ per $t \geq b > a$, sussiste la formula di approssimazione dovuta ad EULERO

$$\int_a^\infty f(t)dt = \frac{h}{2} f(a) + h \sum_{s=1}^{\infty} f(a+sh) + \frac{h^2}{12} f'(a)$$

con h parte aliquota arbitraria della lunghezza $b - a$.

Se si fa $a = 0$, $f(t) = v^t \frac{l(x+t)}{l(x)}$, ove $l(x)$ indica una funzione di sopravvivenza e si fa una volta $h = 1$ ed un'altra volta $h = 1/k$, si ottiene [3]

(7) $$\begin{aligned} \int_0^\infty v^t \frac{l(x+t)}{l(x)} dt &= \frac{1}{2} + a_x - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x) \\ \int_0^\infty v^t \frac{l(x+t)}{l(x)} dt &= \frac{1}{2k} + a_x^{(k)} - \frac{1}{12k^2}(\delta + \mu_x) \end{aligned}$$

(3) L'integrale $\int_0^\infty v^t \frac{l(x+t)}{l(x)} dt$ fornisce il valore attuale della rendita vitalizia continua unitaria.

ove è $\delta = \log(1+i)$, tasso istantaneo di capitalizzazione relativo al tasso annuo i e $\mu_x = -\frac{l'(x)}{l(x)}$, tasso istantaneo di mortalità, di cui un valore approssimato è $\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x}$. Eguagliando i secondi membri delle (7) si ottiene

$$a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2k} - \frac{k^2-1}{12k^2}(\delta + \mu_x). \tag{8}$$

6. Servendoci della Tavola della Statistica Italiana 1901, tasso 0.04, diamo per le rendite vitalizie semestrali, trimestrali e mensili e per le due età $x = 20$, $x = 80$ i valori attuali calcolati coi metodi indicati e messi a confronto coi corrispondenti valori attuali delle rendite vitalizie unitarie

	formula (2)	formula (4)	formula (8)
$a_{20}^{(2)}$	$a_{20} + 0{,}25$	$a_{20} + 0{,}2471676$	$a_{20} + 0{,}2471673$
$a_{20}^{(4)}$	$a_{20} + 0{,}375$	$a_{20} + 0{,}3714021$	$a_{20} + 0{,}3714591$
$a_{20}^{(12)}$	$a_{20} + 458\bar{3}$	$a_{20} + 0{,}4545142$	$a_{20} + 0{,}4545826$
$a_{80}^{(2)}$	$a_{80} + 0{,}25$	$a_{80} + 0{,}2457091$	$a_{80} + 0{,}2369182$
$a_{80}^{(4)}$	$a_{80} + 0{,}375$	$a_{80} + 0{,}3695819$	$a_{80} + 0{,}3586477$
$a_{80}^{(12)}$	$a_{80} + 0{,}458\bar{3}$	$a_{80} + 0{,}4525732$	$a_{80} + 0{,}4410121$

$$a_{20} = 18{,}920589\,; \qquad a_{80} = 3{,}238881$$