Giovanni Aquaro

# Una dimostrazione del teorema di Cramer indipendente dalla teoria dei determinanti.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **6** (1951), n.3, p. 240–245.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_240_0>

# Una dimostrazione del teorema di Cramer indipendente dalla teoria dei determinanti.

Nota di GIOVANNI AQUARO (a Roma).

**Sunto.** - *Come le prime righe della Nota.*

Il notissimo teorema di CRAMER dell'Algebra (¹), in forma poco consueta, ma equivalente all'usuale, può enunciarsi così:

C — *Dato il sistema* $a_1 a_2 \ldots a_n$ *di* n *vettori ad* n *componenti, se soltanto i numeri* $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ *verificano l'equazione*

(¹) Avvertiamo il lettore che le considerazioni della presente Nota vengono svolte con l'ausilio dell'algoritmo vettoriale al solo scopo di brevità *vettoriale* $\sum_{k=1}^{n} a_k y_k = 0$, *esiste uno ed un sol sistema di* n *numeri* $x_1, x_2, \dots x_n$ *che verificano l'equazione vettoriale*

$$\alpha) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b$$

*comunque si assegni il vettore* b *ad* n *componenti.*

Questo risultato viene esposto, di solito, con l'uso della teoria dei determinanti, attraverso la quale si riesce a decidere, con un numero finito di operazioni razionali sulle componenti dei vettori $a_k$, se le ipotesi del teorema $C$ sono soddisfatte ed a costruire, quando esistano, le soluzioni di $\alpha$) come funzioni razionali delle componenti dei vettori $a_k$ e del vettore $b$.

Per contro, l'enunciato $C$ mostra che l'esistenza di soluzioni di $\alpha$) è subordinata al verificarsi di ipotesi dalle quali è completamente estranea la nozione di determinante. Per ciò si è naturalmente indotti a prevedere che, prescindendo dalla teoria dei determinanti, si possa dimostrare il teorema $C$, che si possa stabilire con un numero finito di operazioni razionali sulle componenti degli $a_k$ se le ipotesi del detto teorema sono soddisfatte e che, in fine, si possano costruire razionalmente le soluzioni di $\alpha$) a partire dai vettori $a_1 a_2 \dots a_n$ e $b$. Una conferma di tale previsione è indicata nella presente Nota.

Premettiamo una definizione che sarà utile nel seguito.

Sia dato il sistema di $m$ vettori (complessi)

$$(1) \qquad v_1, \quad v_2, \dots, \quad v_m$$

ad $n$ componenti. Denotate con $v_{h1}, v_{h2}, \dots, v_{hn}$ le componenti di $v_h$, chiameremo sistema trasposto di (1), il sistema di $n$ vettori ad $m$ componenti (complesse)

$$(2) \qquad \overset{*}{v}_1, \quad \overset{*}{v}_2, \dots, \quad \overset{*}{v}_m$$

in cui $\overset{*}{v}_k$ ha le componenti $v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{mk}$.

Ci si convince facilmente che il sistema (1) è, reciprocamente, il trasposto del sistema (2).

Sussiste il teorema

I - *Se il sistema di* n *vettori ad* n *componenti di norma positiva*

$$(3) \qquad u_1, \quad u_2, \dots, \quad u_n$$

vettori e numeri su cui si opera vanno considerati nel campo complesso; ci uniformiamo alla terminologia ed al simbolismo di M. PICONE: *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. I, Studium Urbis, 1949, Roma.

*è ortogonale, cioè, se dette* $u_{h_1}, u_{h_2}, \dots, u_{h_n}$ *le componenti di* $u_h$, *si ha*

$$(u_i, \bar{u}_j) = \sum_{r=1}^{n} u_{ir} \bar{u}_{jr} = 0 \qquad \text{per} \quad i \neq j,$$

*i vettori del sistema trasposto:*

$$\overset{*}{u}_1, \quad \overset{*}{u}_2, \dots, \overset{*}{u}_n$$

*verificano le relazioni:*

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{u_{sh} \bar{u}_{sk}}{|u_s|^2} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad h \neq k \\ 1 & \text{per} \quad h = k \end{cases} \quad (|u_s|^2 = (u_s, u_s)).$$

DIMOSTRAZIONE. - Posto

$$p_{hk} = \sum_{s=1}^{n} \frac{u_{sh} \bar{u}_{sk}}{|u_s|^2} \tag{4}$$

si tratta di stabilire che è:

$$p_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad h = h \\ 0 & \text{per} \quad h \neq k. \end{cases} \tag{5}$$

Dalla (4) consegue:

$$|p_{kh}|^2 = p_{hk} \bar{p}_{hk} = \sum_{r,s}^{1,n} \frac{u_{rh} \bar{u}_{rk}}{|u_r|^2} \cdot \frac{\bar{u}_{sh} u_{sk}}{|u_s|^2}$$

e quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} |p_{hk}|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r,s}^{1,n} \frac{u_{rh} \bar{u}_{sh}}{|u_r|^2} \cdot \frac{u_{sh} \bar{u}_{rk}}{|u_s|^2} = \sum_{r,s}^{1,n} \frac{u_{rh} \bar{u}_{sh}}{|u_r|^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{u}_{rk} u_{sk}}{|u_s|^2} =$$

$$= \sum_{r,s}^{1,n} \frac{u_{rh} \bar{u}_{sh}}{|u_r|^2} \frac{(\bar{u}_r, u_s)}{|u_s|^2} = \sum_{s=1}^{n} \frac{u_{sh} u_{sh}}{|u_s|^2} = p_{hh}.$$

Si conclude che è.:

$$p_{hh} = \sum_{k=1}^{n} |p_{hk}|^2$$

donde, poichè $p_{hh}$ è reale, si trae

$$p_{hh} - p^2_{hh} = \sum_{k=1}^{n}{}^{(h)} |p_{kh}|^2 \tag{6}$$

avendo indicato con $\sum_{k=1}^{n}{}^{(h)}$ la sommatoria per $k = 1, 2, \dots n$ escluso $h$.

Ma la (6) implica

$$p_{hh}(1 - p_{hh}) \geq 0 \tag{7}$$

e per ciò anche:

$$p_{hh} \leq 1 \qquad h = 1, 2, \dots, n, \tag{8}$$

(infatti, essendo $p_{hh} \geq 0$, se si suppone $p_{hh} = 0$ la (8) è verificata e, se si suppone $p_{hh} > 0$, la (7) implica la (8)).

Ora, se nella (8) sussistesse il segno superiore per almeno un valore di $h$, si avrebbe in conseguenza:

$$\sum_{h=1}^{n} p_{hh} < n. \tag{9}$$

Ma essendo:

$$\sum_{h=1}^{n} p_{hh} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{u_{sh}\bar{u}_{sh}}{|u_s|^2} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{|u_s|^2} \sum_{h=1}^{n} u_{sh}\bar{u}_{sh} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{|u_s|^2} (u_s, \bar{u}_s) = n$$

la (9) porterebbe ad un assurdo. Deve essere quindi:

$$p_{hh} = 1 \qquad\qquad h = 1, 2, \dots n.$$

Ciò che, richiamata la (6), fornisce

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{(h)} |p_{hk}|^2 = 0$$

e conseguentemente $p_{hk} = 0$ per $h \neq k$. In conclusione vale la (5) c. d. d.

È appena necessario rilevare il lemma:

*Se il sistema* (3) *è ortonormale, altrettanto accade del suo trasposto.*

Rileviamo ora, poichè le utilizzeremo, le seguenti proposizioni di immediata dimostrazione.

II. - *Dato il sistema ortogonale* (3) *di* n *vettori ad* n *componenti e di norma positiva, condizione necessaria e sufficiente affinchè le costanti* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *verifichino l'equazione vettoriale*

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{u}_h c_h = 0$$

*è che sia* $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

III. - *Considerato lo stesso sistema ortogonale* (3), *dato il vettore* $\xi$ *ad* n *componenti* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, *il vettore* x *ad* n *componenti* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *definite da:*

$$x_h = \frac{(\xi, \bar{u}_h)}{|u_h|^2} \tag{10}$$

*ed esso solo, verifica la equazione vettoriale:*

$$\sum_{h=1}^{n} u_h x_h = \xi. \tag{11}$$

Infatti richiamato il teor. I, dalla (10) consegue $(x, \overset{*}{u}_i) = \xi_i$ onde la (11) ecc. (con $\overset{*}{u}_1, \overset{*}{u}_1, \dots, \overset{*}{u}_n$ si indica il sistema trasposto di (3)).

Siano date le costanti del quadro

$$\begin{matrix} c_{11} & & & \\ c_{21} & c_{22} & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{matrix} \tag{12}$$

e supponiamo che per $h = 1, 2, \ldots, n$ sia:

(13) $$c_{hh} \neq 0.$$

Sono di immediata dimostrazione le proposizioni

IV. - *Assegnate le costanti* (12) *con le condizioni* (13) *i numeri* $x_1 x_2, \ldots x_n$ *soddisfano le equazioni lineari* $\sum_{k=h}^{n} c_{hk} x_k = 0$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ *se e solo se risultano tutti nulli.*

V. - *Considerate le costanti* (12) *con le condizioni* (13), *ad ogni sistema di numeri* $b_1, b_2, \ldots b_n$ *si può far corrispondere uno ed un sol sistema di numeri* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *i quali verifichino le equazioni lineari* $\sum_{k=h}^{n} c_{hk} x_k = b_k$ $(h = 1, 2, \ldots n)$.

Dati gli $m$ vettori (1) ad $n$ componenti, notoriamente si dice che essi sono *linermente dipendenti* quando esistono $m$ numeri non tutti nulli $c_1, c_2, \ldots, c_m$ tali che sia $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m = 0$; i detti vettori si dicono *linearmente indipendenti* nell'ipotesi opposte.

Consideriamo il sistema di $n$ vettori di norma positiva ad $n$ componenti:

(14) $$a_1, \quad a_2, \ldots, a_n$$

È facile convincersi che:

*Condizione necessaria e sufficente affinchè i vettori del sistema* (14) *siano linearmente indipendenti è che esista il sistema ortogonale di* n *vettori di norma positiva, ad* n *componenti;*

(3) $$u_1, \quad u_2, \ldots, u_n$$

*e le costanti* (12) *con le condizioni* (13) (per $h = 1, 2, \ldots, n$) *di guisa che si abbia:*

(15) $$a_h = \sum_{k=1}^{h} c_{hk} u_k.$$

La necessità della condizione consegue dal fatto che, nelle ipotesi della indipendenza lineare dei vettori (14), è possibile applicare il noto processo di ortogonalizzazione di SCHMIDT [2] che ci fornisce le costanti (12) con le condizioni (13) e (15).

Quanto alla sufficienza, se sono assegnate le costanti (12) ed i vettori (3) verificanti le (13) e le (15), se esistono le costanti $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ per cui sia $\sum_{h=1}^{n} a_h \gamma_h = 0$, deve essere anche, in forza delle (15): $\sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{h=k}^{n} c_{hk} \gamma_h = 0$. Ciò, per i teor. II e IV, implica $\sum_{h=k}^{n} c_{hk} \gamma_h = 0$ e poscia $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$.

Consegue il criterio di dipendenza lineare:

(2) Cfr. M. PICONE, op. cit., vol. I, oppure G. JULIA, *Introduction mathématique aux théories quantiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1936, vol. I.

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè i vettori del sistema* (14) *non siano linearmente indipendenti è che al sistema stesso non sia applicabile il procedimento di ortogonalizzazione di Schmidt quando venga formalmente operato.*

Quindi con un numero finito di operazioni razionali si può decidere della dipendenza lineare dei vettori di un prefissato sistema.

La dimostrazione del teor. C è ormai ricondotta a quella del teorema seguente:

*Dato il sistema* (14) *di* n *vettori linearmente indipendenti, ad* n *componenti, esiste uno ed un sol vettore* x *di componenti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *che verifichi l'equazione vettoriale:*

$$\sum_{h=1}^{n} a_h x_h = b \tag{16}$$

*comunque si fissi il vettore* b *ad* n *componenti.*

Dimostrazione. - Poichè i vettori (14) sono linearmente indipendenti, si può costruire il sistema ortogonale (3) di $n$ vettori di norma positiva, ad $n$ componenti e le costanti (12) con le condizioni (13) e (15) (per $h = 1, 2 \ldots n$). La (16) può sostituirsi allora con la:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{h=k}^{n} c_{hk} x_h = b.$$

Questa, a sua volta, a causa del teor. III. è equivalente al sistema di equazioni lineari

$$\sum_{h=k}^{n} c_{hk} x_h = \frac{(b,\ u_k)}{|u_k|^2}$$

il quale, essendo $c_{hh} \neq 0$ per $h = 1, 2 \ldots n$, in forza del teor. V ammette una ed una sola soluzione la quale è, in conseguenza, la soluzione (unica) di (16). c. d. d.