Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giulio Aruffo

Un'osservazione sull'approssimazione di una funzione continua per mezzo di una successione di funzioni razionali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 44–47.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_44_0>

Un'osservazione sull'approssimazione di una funzione continua per mezzo di una successione di funzioni razionali.

Nota di GIULIO ARUFFO (a Roma).

Sunto - *Si dimostra, per certi quozienti di polinomi di* STIELTJES, *una proprietà che interviene nello studio del differenziale generalizzato di una forma esterna.*

1. Nel corso di lezioni che svolge presso l'Istituto di Alta Matematica, il prof. B. SEGRE [1], allo scopo di studiare le condizioni per l'esistenza del differenziale generalizzato di una forma differenziale esterna, associa ad una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$, continua nell' n-blocco E_n definito dalle $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, la successione di funzioni razionali:

$$f^{(m)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{[m]}}{1^{[m]}}, \tag{1}$$

ove $f^{[m]}$ sta ad indicare l' m^{mo} polinomio di STIELTJES approssimante la funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ ed $1^{[m]}$ l'analogo polinomio approssimante la funzione identicamente uguale ad 1 in E_n [2].

La successione delle funzioni razionali $f^{(m)}$ presenta su quella dei polinomi $f^{[m]}$ il vantaggio che, se la funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ non dipende dalla variabile x_i, lo stesso accade per ciascuna delle $f^{(m)}$, mentre l'analoga proprietà non vale per i polinomi $f^{[m]}$.

Nel nominato corso di lezioni trovasi soltanto enunciato che: *Se* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$ *è una funzione continua in* E_n *avente ivi derivata*

$$f_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n} f}{(\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_n)^{i_n}}$$

continua e se D_n *è un* n*-campo tutto interno ad* E_n, *allora si ha:*

$$\lim_{m \to \infty} \{ f^{(m)} \}_{i_1, i_2, \dots, i_n} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n} \tag{2}$$

uniformemente in D_n.

Nel N° 2 della presente Nota stabiliremo questo risultato, e nel N° 3 mostreremo come esso possa ottenersi, come caso particolare, dalla proprietà seguente:

[1] Cfr. B. SEGRE: *Forme differenziali e loro integrali*, « Docet », Edizioni Universitarie Roma, (1951), Vol. I, p. 186 e segg.

[2] Si noti che la (1) ha senso in ogni $X(x_1, \dots, x_n)$ di E_n, in quanto per ogni tale X risulta $1^{[m]} > 0$.

Se $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione continua in E_n, avente ivi continua ciascuna delle derivate $\varphi_{k_1, k_2, \dots, k_n}$, ove:

$$k_r = 0,\ 1, \dots,\ i_r; \quad r = 1,\ 2, \dots,\ n, \tag{3}$$

allora la differenza:

$$\{ \varphi^{[m]} \}_{i_1, i_2, \dots, i_n} - \{ \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_n} \}^{[m]},$$

al divergere di m, tende a zero uniformemente in D_n dell'ordine di un esponenziale (almeno).

2. Dalla (1) segue:

$$\{ f^{(m)} \}_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \sum_{k_1, \dots k_n} \binom{i_1}{k_1}\binom{i_2}{k_2} \cdots \binom{i_n}{k_n} \{ f^{[m]} \}_{i_1-k_1, \dots, i_n-k_n} \{ (1^{[m]})^{-1} \}_{k_1, \dots, k_n}$$

ove nella somma la variabilità delle k è data dalla (3).

È noto (³) che il termine proveniente dalla scelta $k_1 = k_2 \dots = k_n = 0$, tende per $m \to \infty$ ad $f_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ uniformemente in D_n: basterà dunque provare che ciascuno degli altri termini del sommatorio, al divergere di m, tende a zero uniformemente in D_n.

Risulta:

$$\{ f^{[m]} \}_{i_1-k_1, \dots, i_n-k_n} = \frac{1}{a_m^n} \int_{E_n} f(u_1, \dots, u_n) \left\{ \prod_1^n{}_r [1 - (u_r - x_r)^2]^m \right\}_{i_1-k_1, \dots, i_n-k_n} du_1 \dots du_n$$

ove la successione $\left[\dfrac{1}{a_m}\right]$ è infinita dell'ordine di $\sqrt{m}$ (⁴).

Tenuto conto del fatto che $| f(x_1, \dots, x_n) |$ è limitato in E_n e che per ogni $X(x_i)$ in D_n ed $U(u_i)$ in E_n valgono le;

$$0 < \prod_1^n{}_r \{ 1 - (u_r - x_r)^2 \} \leq 1; \quad | u_r - x_r | < 1,$$

si constata immediatamente che il modulo dell'integrando può esser maggiorato con un polinomio in m (a coefficienti costanti) di grado $i_1 + i_2 + \dots + i_n - (k_1 + k_2 + \dots + k_n)$. Pertanto:

$$\{ f^{[m]} \}_{i_1-k_1, \dots\, i_n-k_n} = O\left(m^{\frac{n}{2} + i_1 + \dots + i_n}\right). \tag{4}$$

Mostreremo ora che il fattore $\{ (1^{[m]})^{-1} \}_{k_1, k_2, \dots, k_n}$, non appena sia positivo uno almeno dei numeri k_r, tende a zero uniforme-

(³) Cfr. J. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Cours d'Analyse Infinitésimale*, Gauthier-Villars, (1912), T. II, p. 126 e segg.

(⁴) Cfr. G. VITALI e G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II, 2ª ed., Bologna, (1946), p. 341.

mente in D_n *in modo esponenziale*: ciò evidentemente basta per concludere con la (2).

La derivata $\{(1^{[m]})^{-1}\}_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ si esprime con una frazione il cui denominatore tende ad 1 uniformemente in D_n, mentre il numeratore è una somma di prodotti di derivate del tipo $\{1^{[m]}\}_{q_1, q_2, \dots, q_n}$ con $q_r \leq k_r$ per $r = 1, 2, \dots, n$: è dunque sufficiente provare che ciascuna di queste ultime derivate tende a zero in D_n con legge esponenziale.

Nel seguito supporremo $q_1 > 0$ in quanto ciò, come è ovvio, non costituisce restrizione. Indicato con E_{n-1} l' $n-1$ blocco proiezione ortogonale di E_n sull'iperpiano $x_1 = 0$, risulta:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\{1^{[m]}\} = \frac{1}{a_m^n}\int_{E_n}\frac{\partial}{\partial x_1}\prod_1^n{}_r[1-(u_r-x_r)^2]^m du_1 \dots du_n =$$

$$= \frac{1}{a_m^n}\int_{E_{n-1}}\prod_2^n{}_r[1-(u_r-x_r)^2]^m du_2 \dots du_n \int_0^1 2m[1-(u_1-x_1)^2]^{m-1}(u_1-x_1)du_1 =$$

$$= \frac{1}{a_m}\{[1-x_1^2]^m - [1-(1-x_1)^2]^m\}\, 1^{[m]}(x_2, \dots, x_n),$$

ove $1^{[m]}(x_2, \dots, x_n)$ è l' m^{mo} polinomio di STIELTJES (nelle variabili indicate) che in E_{n-1} approssima la costante 1.

Dall' eguaglianza ora stabilita segue:

$$\{1^{[m]}\}_{q_1, q_2, \dots, q_n} =$$

$$= \frac{1}{a_m}\{[1-x_1^2]^m - [1-(1-x_1)^2]^m\}_{q_1-1}\{1^{[m]}(x_2, \dots, x_n)\}_{q_2, \dots, q_n}.$$

La derivata nel secondo membro risulta una somma di addendi del tipo:

$$\frac{1}{a_m}\{P_r(m)x_1^s(1-x_1^2)^t + Q_r(m)(1-x_1)^s[1-(1-x_1)^2]^t\}\{1^{[m]}(x_2, \dots, x_n)\}_{q_2, \dots, q_n}$$

ove $P_r(m)$, $Q_r(m)$ denotano polinomi in m (a coefficienti costanti) di grado $r \leq q_1 - 1$, ed è $t \geq m - q_1 + 1$.

Ripetendo per il fattore $\{1^{[m]}(x_2, \dots, x_n)\}_{q_2, \dots, q_n}$ il ragionamento che ci è servito per stabilire la (4), e ricordando che in D_n è $0 < a \leq x_1 \leq b < 1$, da quanto precede, maggiorando, si deduce:

$$\{1^{[m]}\}_{q_1, \dots, q_n} = O\left(m^{\frac{n}{2}+q_1+\dots+q_n}\{[1-a^2]^{m-q_1+1} + [1-(1-b)^2]^{m-q_1+1}\}\right)$$

o anche indicando con H il maggiore dei due numeri $1-a^2$, $1-(1-b)^2$:

$$\{1^{[m]}\}_{q_1, \dots, q_n} = O\left(m^{\frac{n}{2}+q_1+\dots+q_n} \cdot H^{m-q_1+1}\right)$$

con $0 < H < 1$, e ciò prova la tesi.

3. Sia ora $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una funzione soddisfacente le ipotesi indicate nell'ultimo capoverso del N° 1. Dall'identità:

$$\{\varphi_{i_1,\, i_2, \dots,\, i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}^{[m]} =$$

$$= \frac{1}{a_m^n} \int_{E_{n-1}} \Pi_{2}^{n}{}_r \{1-(u_r-x_r)^2\}^m du_2 \dots du_n \int_0^1 \varphi_{i_1, \dots,\, i_n}(u_1, \dots u_n)\{1-(u_1-x_1)^2\}^m du_1,$$

calcolando l'integrale semplice per parti, si ricava:

$$\{\varphi_{i_1,\, i_2, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_n)\}^{[m]} =$$

$$= \frac{1}{a_m} \sum_{0}^{i_1-1}{}_r \frac{d^r}{dx_1^{\,r}} \{1-(1-x_1)^2\}^m \{\varphi_{i_1-r-1,\, i_2, \dots,\, i_n}(1, x_2, \dots, x_n)\}^{[m]} -$$

$$- \frac{1}{a_m} \sum_{0}^{i_1-1}{}_r \frac{d^r}{dx_1^{\,r}} \{1-x_1^2\}^m \{\varphi_{i_1-r-1,\, i_2, \dots,\, i_n}(0, x_2, \dots, x_n\}^{[m]} +$$

$$+ \frac{1}{a_m^n} \int_{E_n} \varphi_{i_2, \dots,\, i_n}(u_1, \dots, u_n) \left\{ \Pi_{1}^{n}{}_r [1-(u_r-x_r)^2]^m \right\}_{i_1} du_1 \dots du_n,$$

dalla quale segue:

$$\{\varphi_{i_1,\, i_2, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_n)\}^{[m]} - \{[\varphi_{i_2, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_n)]^{[m]}\}_{i_1} =$$

$$= O\left(m^{\frac{n}{2}+i_1} \cdot H^{m-i_1}\right).$$

Procedendo analogamente si ottiene:

$$\{[\varphi_{i_2, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_n)]^{[m]}\}_{i_1} - \{[\varphi_{i_3, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_n)]^{[m]}\}_{i_1,\, i_2} =$$

$$= O\left(m^{\frac{n}{2}+i_1+i_2} \cdot H^{m-i_2}\right)$$

e quindi, per la precedente,

$$\{\varphi_{i_1,\, i_2, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_n)\}^{[m]} - \{[\varphi_{i_3, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_n)]^{[m]}\}_{i_1,\, i_2} =$$

$$= O\left(m^{\frac{n}{2}+i_1+i_2} \cdot H^{m-i_1-i_2}\right).$$

Così continuando, si perviene alla:

$$\{\varphi_{i_1,\, i_2, \dots,\, i_n}(x_1, \dots, x_u)\}^{[m]} - \{\varphi^{[m]}(x_1, \dots, x_n)\}_{i_1, \dots,\, i_n} = \tag{5}$$

$$= O\left(m^{\frac{n}{2}+\Sigma i_r} \cdot H^{m-\Sigma i_r}\right),$$

la quale prova la proprietà enunciata alla fine del N° 1.

Dalla (5), nel caso particolare $\varphi = 1$, segue la:

$$\{1^{[m]}\}_{i_1,\, i_2, \dots,\, i_n} = O\left(m^{\frac{n}{2}+\Sigma i_r} \cdot H^{m-\Sigma i_r}\right),$$

dalla quale potrebbe dedursi una nuova dimostrazione della (2).