Bollettino
Unione Matematica Italiana

Enrico Bompiani

Sulla curvatura pangeodetica di una curva di una superficie dello spazio proiettivo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 103–106.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_103_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sulla curvatura pangeodetica di una curva di una superficie dello spazio proiettivo.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Lo scopo della Nota è indicato in* 1.

1. Scopo di questa Nota è di porre in relazione la nozione di curvatura pangeodetica di una curva di una superficie in un ordinario spazio proiettivo (invariante per applicabilità proiettive della superficie secondo FUBINI, da me introdotto [1]) con la nozione di curvatura estremale relativa ad un problema variazionale, studiata da G. LANDSBERG, A. L. UNDERHILL, P. FINSLER e L. BERWALD [2].

2. La curvatura pangeodetica.

Ricordo che una superficie (non sviluppabile nè quadrica) dello spazio proiettivo ordinario, su cui u, v siano parametri asintotici (cioè le curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono le asintotiche) ha per *elemento lineare proiettivo* secondo FUBINI [3] la forma (fratta)

$$F(du,\ dv) = \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{du dv} = ds.$$

(1) E. BOMPIANI, *Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie.* « Rend. Acc. Lincei », vol. II, s. VI, 1925, pp. 466-470.

(2) Si veda per es. (anche per le citazioni) L. BERWALD, *Ueber Parallelübertragung in Raümen mit allgemeiner Massbestimmung.* « Jahresb. d. Deuts. Math.-Ver. », Bd. 34, 1926, pp. 213-220.

(3) Si veda per es. FUBINI-ČECH, *Geometria proiettiva differenziale.* Zanichelli, Bologna, 1926.

Le estremali del problema di variazione relativo a $\int F(du, dv)$ sono state dette, dal FUBINI stesso, *pangeodetiche* perchè possono considerarsi anche sulle rigate (per la quali per es. $\beta = 0$).

La mia definizione di curvatura pangeodetica di una curva in un suo punto P è la seguente. Si consideri la pangeodetica tangente alla curva in P: nel punto $P + dP$ (della curva e della pangeodetica) si consideri il logaritmo del birapporto delle tangenti alle due curve e delle tangenti asintotiche (è il procedimento abituale delle geometrie non-euclidee; l'assoluto nel fascio di tangenti in $P + dP$ è costituito dalle due tangenti asintotiche). Questo birapporto infinitesimo diviso per ds è un invariante di 2° ordine, curvatura pangeodetica, della curva in P.

Se u', v' sono le derivate di u, v *rispetto all'arco* s in P della curva, quindi $\beta u'^3 + \gamma v'^3 = u'v'$, la curvatura ora definita vale (v. l. c. (¹))

$$\frac{1}{k} = \frac{v''}{v'} - \frac{u''}{u'} - \frac{1}{2}\,(\partial_u \log \beta \cdot u' - \partial_v \log \gamma \cdot v') -$$
$$- \frac{1}{2}(\beta \partial_v \log \beta^2\gamma \cdot u'^2 - \gamma \partial_u \log \beta\gamma^2 \cdot v'^2)$$

ed è invariante per applicabilità proiettive.

3. La curvatura estremale.

Per scrivere in forma compatta l'espressione della curvatura estremale conviene porre $u^1 = u$, $u^2 = v$ e giovarsi delle notazioni del calcolo tensoriale. Se le equazioni delle estremali (pangeodetiche) si scrivono

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \varphi^i\left(u, \frac{du}{ds}\right) = 0$$

e s'indicano i primi membri, componenti del vettore di EULERO, con

$$\rho^i = \frac{d^2u^i}{ds^2} + \varphi^i\left(u, \frac{du}{ds}\right)$$

il quadrato della curvatura estremale è dato da

$$\frac{1}{\rho^2} = g_{ik}\rho^i\rho^k$$

ove

$$g_{ik}(u, du) = g_{ik}\left(u, \frac{du}{ds}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2(u, du)}{\partial du^i \partial du^k}$$

(le g_{ik} sono quindi omogenee di grado zero nelle du^i; queste possono perciò sostituirsi con le $\dfrac{du^i}{ds}$).

Per eseguire il confronto fra le due curvature $1/k$ e $1/\rho$ bisogna esplicitare le espressioni ora introdotte. E basterà accennare i calcoli.

4. Confronto fra le due curvature.

Da

$$F(u, u') = \frac{\beta u'^3 + \gamma v'^3}{u'v'}$$

si ha (con notazioni evidenti per le derivate)

$$F_{u'} = \frac{2\beta u'^3 - \gamma v'^3}{u'^2 v'}, \quad F_{u'u'} = 2\frac{\beta u'^3 + \gamma v'^3}{u'^3 v'^2}, \quad F_{u'v'} = -2\frac{\beta u'^3 + \gamma v'^3}{u'^2 v'^2}$$

e perciò

$$g_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial u'^2} = 3\frac{2\beta^2 u'^6 + \gamma^2 v'^6}{u'^4 v'^2}$$

$$g_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial u' \partial v'} = \frac{-4\beta^2 u'^6 - 4\gamma^2 v'^6 + \beta\gamma u'^3 v'^3}{u'^3 v'^3}$$

$$g_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial v'^2} = 3\frac{\beta^2 u'^6 + 2\gamma^2 v'^6}{u'^2 v'^4}.$$

È

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{(\beta du^3 + \gamma dv^3)^4}{du^6 dv^6} \geq 0$$

(ed è $=0$ solo sulle linee di DARBOUX).

Indichiamo con φ, ψ le φ^i che figurano nel vettore di EULERO. Si ha

$$\frac{1}{\rho^2} = F_{u'u'}(u'' + \varphi)^2 + 2F_{u'v'}(u'' + \varphi)(v'' + \psi) + F_{v'v'}(v'' + \psi)^2$$

cioè tenuto conto delle espressioni di $F_{u'u'}$, $F_{u'v'}$, $F_{v'v'}$

$$\frac{1}{2\rho^2} = \left(\frac{u''}{u'} - \frac{v''}{v'} + \frac{\varphi}{u'} - \frac{\psi}{v'}\right)^2.$$

Bisogna ora esplicitare φ e ψ. Le equazioni differenziali delle pangeodetiche riferite al loro arco proiettivo sono (l. c. ([1]), form. 6)

$$\frac{u''}{u} + \frac{1}{2}\partial_u \log\beta \cdot u' - \frac{1}{2}\gamma\partial_u \log\beta\gamma^2 \cdot v'^2 +$$

$$+ \frac{3}{2}\beta\gamma(\partial_u \log\beta\gamma^2 \cdot u' + \partial_v \log\beta^2\gamma \cdot v')u'v' = 0$$

$$\frac{v''}{v} + \frac{1}{2}\partial_v \log\gamma v' - \frac{1}{2}\beta\partial_v \log\beta^2\gamma \cdot u'^2 +$$

$$+ \frac{3}{2}\beta\gamma(\partial_u \log\beta\gamma^2 \cdot u' + \partial_v \log\beta^2\gamma \cdot v')u'v' = 0,$$

e quindi i primi membri sono proprio le espressioni $(u'' + \varphi)/u'$ e $(v'' + \psi)/v'$ che ci occorrono. Nella loro differenza si eliminano i termini in $u'^2 v'$, $u' v'^2$ e si ha

$$\frac{1}{2\rho^2} = \frac{1}{k^2}.$$