Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Su un criterio del Dini di convergenza uniforme.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 106–108.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_106_0>

Su un criterio del Dini di convergenza uuiforme.

Nota di Mauro Picone (a Roma).

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme di una successione di funzioni definite in un insieme elementare di uno spazio di* Hausdorff, *aventi ciascuna coinsieme in uno spazio metrico.*

È ben noto, ed utilmente applicato in Analisi, il seguente criterio di convergenza uniforme del Dini:

Se una successione $\{ f_n(x) \}$ *di funzioni reali della variabile reale* x, *continue in un intervallo* (a, b), *chiuso e limitato, converge ivi, non decrescendo, verso una funzione continua, la convergenza è uniforme nell' intervallo.*

Sia $\{ f_n(x) \}$ una successione di arbitrarie funzioni reali della variabile reale x, definita nell' arbitrario intervallo (a, b) e sia $f(x)$ un' altra tale funzione. Posto

$$p_n(x) = | f(x) - f_n(x) | + \frac{1}{n}, \tag{1}$$

supponiamo che si abbia

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

uniformemente in (a, b). Si avrà pure, allo stesso modo,

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x) = 0,$$

e viceversa, e, per ogni successione crescente $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, di indici,

$$\lim_{k \to \infty} p_{n_k}(x) = 0,$$

del pari uniformemente in (a, b). Sia ν_1 il più basso fra i numeri n_k per cui si abbia, in (a, b),

$$p_{\nu_1}(x) < \frac{1}{n_1},$$

ν_2 il più basso fra i numeri n_k per cui si abbia

$$p_{\nu_2}(x) < \frac{1}{\nu_1},$$

ecc., si ottiene, così, la successione $\{p_{\nu_k}(x)\}$, subordinata alla $\{p_{n_k}(x)\}$, decrescente in ogni punto x di (a, b). Si ha dunque il risultato:

I. *Assegnata, in un arbitrario intervallo* (a, b), *una successione* $\{\mathrm{f_n(x)}\}$ *di arbitrarie funzioni reali della variabile reale* x, *condizione necessaria affinchè essa converga, uniformemente in* (a, b), *verso una funzione* f(x), *è che, introdotte le funzioni* $\mathrm{p_n(x)}$, *definite dalla* (1), *ad ogni successione subordinata alla* $\{\mathrm{p_n(x)}\}$, *ne sia subordinata una decrescente in ogni punto di* (a, b).

Ebbene si dimostra immediatamente che se l'intervallo (a, b) è chiuso e limitato e le funzioni $f_n(x)$ e $f(x)$ vi sono continue, supposto che la successione $\{f_n(x)\}$ converga in (a, b) verso la $f(x)$ la sopraddetta condizione necessaria è anche sufficiente per l'uniformità della convergenza. La dimostrazione può farsi, supponendo, più in generale, che x indichi un elemento di un arbitrario spazio di HAUSDORFF e ogni funzione $f_n(x)$ della successione $\{f_n(x)\}$ sia definita in un insieme C, chiuso e compatto — cioè, come dirò, *elementare* ([1]) — di detto spazio e faccia corrispondere a ciascuno elemento di C un elemento di uno spazio metrico del pari arbitrario, pervenendo al seguente teorema:

II. *Condizione necessaria affinchè la successione* $\{\mathrm{f_n(x)}\}$ *converga uniformemente in un insieme, verso una funzione* f(x), *è che, ad ogni successione subordinata alla* $\{\mathrm{p_n(x)}\}$, *ne sia subordinata una decrescente in ogni elemento dell'insieme. Se la successione* $\{\mathrm{f_n(x)}\}$ *converge nell'insieme elementare* C, *verso la funzione* f(x), *riuscendo ciascuna funzione* $|\mathrm{f_n(x)} - \mathrm{f(x)}|$ *supersemicontinua in* C ([2]), *la detta condizione è anche sufficiente per l'uniformità, in* C, *della convergenza.*

Se, supposta soddisfatta tale condizione, la convergenza della successione $\{p_n(x)\}$ non fosse uniforme in C, esisterebbero un numero positivo ε ed una successione crescente di indici $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, tale che l'insieme

$$C_{n_k} = C[p_{n_k}(x) \geqq \varepsilon].$$

([1]) Seguendo una locuzione da me proposta nel mio scritto: *Due conferenze sui fondamenti del "Calcolo delle variazioni"*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », Vol. 80 della serie IV, 1950-51.

([2]) Dico (cfr. loc. cit. ([1]), p. 52) supersemicontinua (infersemicontinua) invece di semicontinua superiormente (inferiormente).

non sia vuoto per qualsivoglia k. Per la supposta supersemicontinuità delle $p_n(x)$ in C, l'insieme C_{n_k} risulterebbe pur esso elementare. Sia $\{p_{\nu_k}(x)\}$ una successione decrescente in C, subordinata alla $\{p_{n_k}(x)\}$. L'insieme $C_{\nu_{k+1}}$ sarebbe contenuto nell'insieme C_{ν_k}, per qualsivoglia k, e pertanto, data l'elementarità di C e dei C_{ν_k}, esisterebbe un elemento x_0 comune a questi insiemi, nel quale risulterebbe

$$p_{\nu_k}(x_0) \geqq \varepsilon ,$$

per qualsivoglia k, ciò che, per la supposta convergenza in C della successione $\{f_n(x)\}$ verso la $f(x)$, è assurdo.