ROBERTO CONTI

Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard generalizzata. Esistenza ed unicità.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 111–118.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_111_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard generalizzata. Esistenza ed unicità

Nota di Roberto Conti (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra che un criterio per l'esistenza di soluzioni periodiche dell'equazione* $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ *dato di recente da* A. F. Filippov, *ne include un altro di* N. Levinson e O. K. Smith. *Si dimostra inoltre un criterio di unicità che estende all'equazione suddetta un analogo criterio dato da* G. Sansone *per il caso* $g(x) = x$.

1. Un problema di notevole interesse anche nel campo delle applicazioni alla Fisica è costituito, come è ben noto, dalla ricerca delle soluzioni periodiche di equazioni differenziali della forma

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (\dot{x} = dx \,/\, dt) \tag{A}$$

ed in particolare della forma (di Liénard)

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0 \text{ [1]}. \tag{A_0}$$

Il presente lavoro comprende due sezioni, ciascuna dedicata ad uno dei due aspetti della questione. Nella prima di esse (nn. 2, 3, 4, 5) riguardante i criteri di esistenza di soluzioni periodiche, facciamo vedere che un recente teorema di A. F. Filippov [2] ne contiene uno, ben noto, di N. Levinson e O. K. Smith [3]. Nella seconda parte (nn. 6, 7, 8), concernente la unicità della soluzione periodica, generalizziamo, estendendolo alla (A), un criterio dimostrato da G. Sansone per la (A_0) [4].

[1] Per la bibliografia sull'argomento rinviamo a: G. Sansone, *Sopra l'equazione di Liénard delle oscillazioni di rilassamento*, « Annali di Mat. pura ed appl. ». (4), 28, (1949), pp. 153-181.

[2] A. F. Filippov, *Condizioni sufficienti per l'esistenza di cicli limite stabili per l'equazione del 2° ordine* (russo), « Matem. Sbornik », 30 (72), (1952), pp. 171-180; teor. I.

[3] Il teorema cui ci riferiamo qui è quello che si ricava applicando alla (A) il teorema dato per la più generale equazione $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ in N. Levinson-O. K. Smith, *A general equation for relaxation oscillations*, « Duke Math. J. », 9 (1942), pp. 382-403; teor. I.

[4] G. Sansone, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard. Calcolo del periodo*, « Rend. Sem. Matem. Univ. e Polit. di Torino », 10 (1950-1), pp. 154-171; (pp. 159-161).

2. Diremo che la funzione $g(x)$, *soddisfa le ipotesi* α) se è

$$xg(x) > 0, \qquad |x| > 0, \tag{1}$$

e se, posto

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi,$$

si ha

$$G(-\infty) = G(+\infty) = +\infty.$$

Da queste condizioni possiamo trarre alcune conseguenze che ci occorrono per il seguito.

Anzitutto $G(x)$ risulta positiva per $x \neq 0$ in virtù della (1), nulla per $x = 0$; perciò ha senso, nel campo reale, considerare la funzione $z = z(x)$ definita da

$$z = \sqrt{2G(x)}\,\mathrm{sgn}\, x, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

dove $\sqrt{a}$ indica la radice aritmetica del numero positivo a.

Sempre per la (1) la $z = z(x)$ risulta crescente per ogni x ed ovunque derivabile, il punto $x = 0$ al più eccettuato, con

$$dz/dx = g(x)/z(x).$$

Pertanto $z(x)$ ammette una funzione inversa

$$x = x(z), \qquad -\infty < z < +\infty,$$

crescente, ovunque derivabile (tolto al più il punto $z = 0$); posto

$$\gamma(z) = g(x(z)),$$

è, per (1) e (2)

$$dx/dz = z/\gamma(z) > 0. \tag{3}$$

Infine se $f(x)$ è una funzione continua per $-\infty < x < +\infty$ e poniamo

$$\varphi(z) = f(x(z)),$$

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi, \qquad \Phi(z) = F(x(z)),$$

si ha subito dalla (3)

$$\varphi(z)d\Phi/dz > 0, \qquad z \neq 0. \tag{4}$$

3. Vale il

TEOREMA I. - (A. F. FILIPPOV) ([5]):

L'equazione (A) *ammette almeno una soluzione periodica se* f(x), g(x) *sono funzioni continue, la* g(x) *soddisfa le ipotesi* α) *del n.* 2 *ed inoltre :*

([5]) Loc. cit. in ([2]). Avvertiamo che le notazioni del testo sono alquanto diverse da quelle adoperate dall'A. cit.

a) *esistono due costanti positive* z_0, b, *con* $b < 2$, *tali che*

$$\Phi(z) \leq \Phi(-z), \qquad 0 < z < z_0, \tag{5}$$

(*ma non è dappertutto* $\Phi(z) = \Phi(-z)$);

$$\Phi(z)/z < b, \qquad -z_0 < z < 0;\ 0 < z < z_0;\ 0 < b < 2; \tag{6}$$

b) *esistono due costanti positive* z_1, c, *con* $z_1 > z_0$, $c < 2$, *tali che*

$$\int_0^{z_1} [\Phi(\zeta) - \Phi(-\zeta)]\zeta d\zeta > 0; \tag{7}$$

$$\Phi(z) \geq \Phi(-z), \qquad z_1 < z \tag{8}$$

$$\Phi(z)/z > -c, \qquad z < -z_1;\ z_1 < z;\ 0 < c < 2. \tag{9}$$

Nei due numeri successivi mostreremo che questo teorema è più generale del seguente:

TEOREMA II. - (N. LEVINSON-O. K. SMITH) ([6])

L'esistenza di almeno una soluzione periodica dell'equazione (A) *è assicurata se* f(x), g(x) *sono funzioni derivabili, la* g(x) *soddisfa le ipotesi* α) *del n.* 2, *ed inoltre*

a') è $\qquad f(0) < 0;$

b') è

$$f(x) > -M, \qquad -\infty < x < +\infty;\ M > 0; \tag{10}$$

esiste una costante $x_0 > 0$ *tale che*

$$f(x) > 0, \qquad |x| > x_0; \tag{11}$$

esiste una costante $x_1 > x_0$ *tale che*

$$F(x_1) > F(x_0) + 10Mx_0 \text{ ([7])}. \tag{12}$$

Per provare il nostro asserto faremo vedere (n. 4) che le condizioni del teorema II implicano quelle del teorema I, ma non viceversa (n. 5).

4. Se è $f(0) < 0$, per la continuità di $f(x)$ esiste un intorno di $x = 0$ in cui è $f(x) < 0$, quindi esiste un intorno $(-z_0,\ z_0)$ di 0 in

([6]) Loc. cit. in ([3]).

([7]) Questa disuguaglianza può essere quantitativamente migliorata sostituendo a $10Mx_0$ la quantità $4Mx_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Cfr. A. D. DRAGHILEV, *Soluzioni periodiche dell'equazione differenziale delle oscillazioni non lineari*, (russo), « Prikl. Mat. i Meh. », 16 (1952), pp. 85-88.

cui è $\varphi(x) < 0$ e per la (4) è $d\Phi/dz < 0$. perciò

$$(13) \qquad \Phi(z)/z < 0, \qquad -z_0 < z < 0;\ 0 < z < z_0,$$

disuguaglianza che include la (5) e la (6).

Qualunque sia $x_0 > 0$ poniamo

$$\zeta' = \sqrt{2G(x_0)}, \qquad \zeta'' = -\sqrt{2G(-x_0)}, \qquad (\zeta'' < 0 < \zeta'),$$

ed avremo

$$F(x_0) = \Phi(\zeta'), \qquad F(-x_0) = \Phi(\zeta'').$$

Dalla (10) segue

$$(14) \qquad \Phi(\zeta') > -Mx_0, \qquad \Phi(\zeta'') < Mx_0.$$

Se fissiamo x_0 in modo che valga la (11), dalla (4) segue

$$(15) \qquad d\Phi/dz > 0, \qquad z < \zeta'';\ \zeta' < z$$

e per le (14)

$$(16) \qquad \Phi(z) > -Mx_0 \qquad \zeta' \leq z$$

$$(17) \qquad \Phi(z) < Mx_0, \qquad z \leq \zeta''.$$

Sia ora x_1 la costante che appare nella (12); se poniamo

$$\zeta = \sqrt{2G(x_1)}, \qquad (\zeta > \zeta'),$$

la (12) si scrive

$$\Phi(\zeta) > \Phi(\zeta') + 10Mx_0,$$

e per la prima delle (14)

$$\Phi(\zeta) > 9Mx_0 > 0,$$

e infine per la (15)

$$(18) \qquad \Phi(z) > 9Mx_0 > 0, \qquad \zeta \leq z.$$

D'altronde la (17) si può scrivere

$$\Phi(-z) < Mx_0, \qquad -\zeta'' \leq z$$

e da questa e dalla (13 segue

$$\Phi(z) - \Phi(-z) > 8Mx_0 > 0, \qquad z \geq \max(\zeta, -\zeta'').$$

Per concludere basta osservare che per la (15) la funzione $\Phi(z) - \Phi(-z)$ risulta crescente per $z \geq \max(\zeta, -\zeta'')$ e poichè essa è positiva sarà possibile trovare una costante $z_1 \geq \max(\zeta, -\zeta'')$ in modo che valga (7). Infine per le (16) e (17) è

$$\Phi(z)/z > -Mx_0/z, \qquad \zeta' \leq z,$$

$$\Phi(z)/z > Mx_0/z, \qquad z \leq \zeta''$$

perciò, aumentando se necessario z_1, la (9) è verificata per $z \geq z_1$, comunque si fissi $c > 0$.

5. Per mostrare che vi sono equazioni verificanti le ipotesi del teorema I, ma non quelle del teorema II ci possiamo limitare al caso, particolarmente evidente, delle equazioni (A_0) di LIÉNARD.

Se $g(x) = x$ le condizioni α) del n. 2 sono evidentemente soddisfatte e si ha $z = x$; l'enunciato del teorema I prende una forma più semplice. Se inoltre $f(-x) = f(x)$ le condizioni a) e b) di tale teorema diventano:

a_0) esiste una costante $x_0 > 0$ tale che per $0 < x < x_0$ sia $F(x) \leq 0$ (ma non identicamente $F(x) = 0$);

b_0) esiste una costante $x_1 > x_0$ tale che per $x > x_1$ si abbia $F(x) \geq 0$ e sia inoltre

$$\int_0^{x_1} F(\xi)\xi d\xi > 0.$$

Dopodichè è facile trovare funzioni $f(x)$ (pari) indefinitamente oscillanti intorno allo zero in prossimità del punto $x = 0$ e del punto $x = +\infty$ che tuttavia soddisfano le a_0), b_0).

È chiaro anche che dal teorema I si potrebbero dedurre criteri di esistenza relativi al caso $f(0) = 0$.

6. Passiamo a studiare nei nn. segg., la questione dell'unicità delle soluzioni periodiche della (A).

Il primo teorema di unicità fu provato da A. LIENARD [8] per la (A_0) con $f(-x) = f(x)$; l'estensione alla (A) si deve a N. LEVINSON–O. K. SMITH nell'ipotesi $g(-x) = -g(x)$ [9]. Gli stessi AA. hanno anche dato un teorema di unicità prescindendo dalle condizioni $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ [10], ma in questo come anche in altri teoremi [11] si pongono ipotesi che hanno sempre un qualche legame con la parità.

Il primo teorema di unicità che se ne distacca completamente è stato dato da G. SANSONE [12] per la (A_0).

Modificando opportunamente il ragionamento di questo A. è possibile tuttavia ottenere un criterio un po' più generale già nel

[8] A. LIÊNARD, *Etude des oscillations entretenues*, « Révue générale de l'Electricité », 23 (1928), pp. 901-946.

[9] Loc. cit. in [3], § 4.

[10] Loc. cit. in [3], teor. III.

[11] Cfr. loc. cit. in [1], §, 2.

[12] Loc. cit. in [4].

caso della (A_0) (cfr. n. 8, c)) e valido inoltre per la (A). Da rilevare che in questo nuovo criterio (che enunciamo e dimostriamo nel successivo n. 7) interviene in modo essenziale la considerazione della funzione $\Phi(z)/z$ che appare nel teorema I di ésistenza.

7. TEOREMA III.

Se sono soddisfatte le ipotesi α) *del n.* 2 *e se la funzione* $\Phi(z)/z$ *è non crescente per* $z \leq 0$, *non decrescente per* $z \geq 0$ *ed infine è*

$$|\Phi(z)/z| < 2 \qquad -\infty < z < +\infty, \tag{19}$$

allora non può esservi più di una soluzione periodica della (A).

Seguendo il metodo di LIÉNARD trasformiamo la (A) nel sistema equivalente

$$\dot{x} = y - F(x), \qquad \dot{y} = -g(x),$$

ovvero, mediante la variabile z definita dalla (2), nel sistema

$$\dot{z} = \gamma(z)\frac{y - \Phi(z)}{z}, \qquad \dot{y} = -\gamma(z)$$

da cui, eliminando t, si ha l'equazione

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\Phi(z) - y}{z}. \tag{B}$$

Posto

$$z = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \tag{20}$$

si ha facilmente

$$\frac{d \log \rho}{d\theta} = \frac{\Phi(z)z}{y^2 - \Phi(z)y + z^2}. \tag{21}$$

Se vale la (19) è $y^2 - \Phi(z)y + z^2 > 0$ qualunque sia y, cosicchè è pure

$$\dot{\theta} = -\frac{\gamma(z)}{z}\frac{y^2 - \Phi(z)y + z^2}{\rho^2} < 0,$$

e le eventuali curve integrali chiuse della (B) si possono rappresentare nella forma $\rho = \rho(\theta)$ con $\rho(\theta)$ funzione univoca di θ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\rho(0) = \rho(2\pi)$.

Se la (A) possiede due diverse soluzioni periodiche, la (B) ammette due curve integrali chiuse distinte

$$\Gamma_1: \qquad \rho_1 = \rho_1(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$
$$\Gamma_2: \qquad \rho_2 = \rho_2(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Poichè per la (B) vale il teorema di unicità la Γ_1 e la Γ_2 non possono avere punti in comune e sarà perciò, ad es.

$$\rho_1 < \rho_2, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{22}$$

D'altronde si ha dalla (21) con semplici calcoli e con evidente significato dei simboli

$$\frac{d \log (\rho_1 / \rho_2)}{d\theta} = (\rho_1 \rho_2 \cos \theta)^2 \frac{\Phi(z_1)/z_1 - \Phi(z_2)/z_2}{(y_1^2 - \Phi(z_1)y_1 + z_1^2)(y_2^2 - \Phi(z_2)y_2 + z_2^2)},$$

e da questa, integrando rispetto a θ tra 0 e 2π

$$0 = \int_0^{2\pi} (\rho_1 \rho_2 \cos \theta)^2 \frac{\Phi(z_1)/z_1 - \Phi(z_2)/z_2}{(y_1^2 - \Phi(z_1)y_1 + z_1^2)(y_2^2 - \Phi(z_2)y_2 + z_2^2)} d\theta.$$

Ma questa uguaglianza è assurda poichè dalla (22) e dalle ipotesi di monotonia fatte sulla $\Phi(z)/z$ segue

$$\Phi(z_1)/z_1 - \Phi(z_2)/z_2 \geq 0$$

cosicchè la funzione sotto il segno di integrale è sempre ≥ 0 (senza essere identicamente nulla).

8. Concludiamo con alcune osservazioni ed esempi.

a) Dalle ipotesi di monotonia circa la $\Phi(z)/z$ segue che l'estremo inferiore della $\Phi(z)/z$ stessa coincide col limite di $\Phi(z)/z$ al tendere di z a zero; per la (19) dovrà aversi perciò

$$\left| \lim_{z \to 0} \Phi(z)/z \right| < 2.$$

D'altronde questo limite, se esiste la derivata della $g(x)$ nel punto $x = 0$, $g'(0)$ (necessariamente > 0 per la (1)), coincide con $f(0) / \sqrt{g'(0)}$ cosicchè la disuguaglianza ora scritta diventa

$$f^2(0) - 4g'(0) < 0,$$

condizione questa sufficiente ad assicurare, come si potrebbe vedere facilmente, che *il punto* (0, 0) *è per la* (B) *del tipo del fuoco* (instabile se è anche $f(0) < 0$).

b) È opportuno tener presente che il teorema III *non* assicura, in generale, anche l'esistenza della soluzione periodica; semplici esempi mostrano infatti che le condizioni del teorema III sono compatibili anche con altre condizioni che escludono l'esistenza di soluzioni periodiche ([13]).

([13]) Per un teorema di non esistenza cfr. G. SANSONE, *Sopra una classe di equazioni di Liénard prive di integrali periodici*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), 6, (1949), pp. 156-160.

c) Esempio. Si consideri l' equazione (A_0) con

$$f(x) = 2\,\frac{k^4x^4 + 4k^2x^2 - 1}{(k^2x^2 + 1)^2}, \quad \text{se} \quad x \geq 0;$$

$$f(x) = 2\,\frac{h^4x^4 + 4h^2x^2 - 1}{(h^2x^2 + 1)^2}, \quad \text{se} \quad x \leq 0,$$

e con h, k costanti positive. Per questa equazione sono verificate le ipotesi del precedente teorema III; invece avendosi $f(x) > 2$ se $x > 1 / k$, o se $x < -1 / h$, non lo sono tutte quelle del teorema già ricordato di G. Sansone ([14]).

D' altro canto è facile verificare che se sono soddisfatte le condizioni iv) ($|f(x)| < 2$) e v) ($f(x)$ non crescente per $x \leq 0$, non decrescente per $x \geq 0$) di tale teorema, lo sono anche quelle del teorema III.

Infine se $h \neq k$ si ha un esempio di equazione con una sola soluzione periodica che sfugge a tutti i criteri di unicità noti (oltre quello ora ricordato) già citati nel n. 6.