

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ALDO COSSU

## Sulle trasformazioni puntuali tra spazi a rette caratteristiche coincidenti.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.  
7 (1952), n.2, p. 118–122.*

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1952\\_3\\_7\\_2\\_118\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_118_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Sulle trasformazioni puntuali tra spazi a rette caratteristiche coincidenti.

Nota di ALDO COSSU (a Bari).

**Sunto.** - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia regolare di punti corrispondenti nel caso in cui le sette rette caratteristiche coincidano.*

1. **Premessa.** - Come è noto l'intorno del secondo ordine di una coppia regolare  $O, \bar{O}$  di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale  $T$  tra due spazi lineari  $S_3, \bar{S}_3$ , determina le rette caratteristiche, cioè le rette tangenti ad  $E_2$  di flesso per  $O$  corrispondenti in  $T$  ad  $E_2$  di flesso per  $\bar{O}$  <sup>(1)</sup>.

Esse sono, in generale, le sette rette base di una rete di coni cubici di vertice  $O$ , determinante nella stella di centro  $O$  un'involuzione del 2° ordine e del 3° tipo, secondo BERTINI, in cui si

<sup>(14)</sup> Loc. cit. in <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Cfr. CREANGA, *Sulle trasformazioni degli intorni del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei*, « Rend. di Mat. », Ser. V, vol. I, 1940; M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali tra spazi lineari*, Note I, II, III, « Rend. Acc. Lincei », Ser. VIII, Vol. IV, 1948.

corrispondono tangenti asintotiche di calotte  $\sigma_2$  per  $O$  corrispondenti in  $T$  a calotte inflessionali  $\bar{\sigma}_2$  per  $\bar{O}$  <sup>(2)</sup>.

In questa Nota si considera il caso in cui le sette rette caratteristiche sono coincidenti, o meglio, il caso in cui il suddetto sistema sia di coni cubici aventi un contatto del sesto ordine lungo una generatrice base.

Mediante la considerazione del triangolo di riferimento intrinsecamente determinato da un  $E_6$  lineare e regolare di curva piana, e di particolari corrispondenze subordinate, secondo BOMPIANI <sup>(3)</sup>, dalla  $T$  su piani corrispondenti per  $O$  ed  $\bar{O}$ , passando poi all'intorno del 3° ordine, si determinano le equazioni canoniche della  $T$ .

Servendosi infine della  $V_6$  di  $S_{15}$  di SEGRE immagine delle coppie di punti dei due spazi  $S_3$ ,  $\bar{S}_3$ , si danno le equazioni delle  $\infty^9$  trasformazioni cubiche osculatrici.

**2. Intorno del 2° ordine.** - Usufruento dell'arbitrarietà nella scelta dei riferimenti nei due spazi  $S_3$ ,  $\bar{S}_3$ , l'equazioni della  $T$  nell'intorno della coppia  $O$ ,  $\bar{O}$  possono assumere la forma

$$(2.1) \quad \bar{x}_i = x_i + \varphi_i(x_1, x_2, x_3) + [3] \quad (i = 1, 2, 3)$$

ove  $x_i$ ,  $\bar{x}_i$  sono coordinate proiettive non omogenee di punti corrispondenti nei due spazi,  $\varphi_i$  forme di secondo grado nelle  $x_i$ ,  $[3]$ , termini di grado  $> 2$ .

Le sette rette caratteristiche sono le rette base del sistema  $\infty^2$  di coni cubici:

$$(2.2) \quad \lambda_1(x_2\varphi_3 - x_3\varphi_2) + \lambda_2(x_3\varphi_1 - x_1\varphi_3) + \lambda_3(x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1) = 0.$$

Consideriamo una generatrice base della rete (2.2) che si può assumere di equazioni  $x_1 = x_2 = 0$ ; posto allora

$$\varphi_1 = \Sigma a_{ij}x_ix_j, \quad \varphi_2 = \Sigma b_{ij}x_ix_j, \quad \varphi_3 = \Sigma c_{ij}x_ix_j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

ove le somme sono estese alle combinazioni con ripetizione degli indici  $i, j$ , si ha  $a_{33} = b_{33} = 0$ .

Affinchè il sistema (2.2) sia di coni cubici aventi lungo la  $x_1 = x_2 = 0$  un contatto del sesto ordine, basta ad esempio imporre la condizione che la rete di  $C^3$  ottenuta segnando il sistema con un piano generico, ad es. il piano improprio, non ancora intrinsecamente determinato, abbia un  $E_6$  base.

Per determinare un riferimento intrinseco nella stella di centro  $O$  e quindi nella stella di centro  $\bar{O}$ , si può assumere sul piano

<sup>(2)</sup> A. Cossu, *Trasformazioni puntuali tra spazi osculabili con trasformazioni quadratiche*, « Rend. di Mat. », Ser. V, Vol. X, 1951.

improprio come tangente e normale proiettiva all' $E_6$  base della rete di  $C^3$  sezione, rispettivamente le rette improprie di  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 0$ . Infine si prende come retta impropria di  $x_3 = 0$  la tangente alla conica osculatrice determinata dall' $E_4$  dell' $E_6$ , nel suo punto di intersezione, distinto dal punto improprio di  $x_1 = x_2 = 0$ , con la normale proiettiva. Può inoltre assumersi come punto improprio di  $x_1 = x_2 = x_3$  un punto della suddetta conica osculatrice (4).

Con questa scelta del riferimento nella stella di centro  $O$  si ha

$$\begin{aligned} a_{23} = b_{13} = c_{11} = c_{22} = 0, \quad a_{13} = c_{33}, \quad a_{12} = c_{23} = b_{22}, \\ a_{11} = b_{12} = c_{13}, \quad a_{22} = c_{12}, \quad b_{23} = a_{13} - b_{11}. \end{aligned}$$

Quindi le equazioni (2.1) della  $T$  assumono la forma

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + [3] \\ \bar{x}_2 &= x_2 + b_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + a_{11}x_1x_2 + (a_{13} - b_{11})x_2x_3 + [3] \\ \bar{x}_3 &= x_3 + a_{13}x_1^2 + a_{22}x_1x_2 + a_{11}x_1x_3 + a_{12}x_2x_3 + [3]. \end{aligned}$$

Al punto improprio di  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$  si fa corrispondere il punto improprio di  $x_1 = x_2 = 0$  nella proiettività caratteristica relativa a queste due rette inflessionali, con ciò si ha  $a_{13} = 0$ .

Si consideri inoltre la trasformazione  $T'$  subordinata, secondo BOMPIANI (3), dalla  $T$ , sino all'intorno del secondo ordine, tra i piani  $x_3 = 0$ ,  $\bar{x}_3 = 0$ , relativamente alla retta  $x_1 = x_2 = 0$ .

Essa ha equazioni

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + [3] \\ \bar{x}_2 &= x_2 + b_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + a_{11}x_1x_2 + [3]. \end{aligned}$$

Delle tre rette inflessionali della  $T'$  (2.4) su  $x_3 = 0$  si può assumere una come retta  $x_1 - x_2 = x_3 = 0$  e si può inoltre far corrispondere al suo punto unità quello improprio di  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$  nella proiettività caratteristica relativa a queste due rette. si ha allora

$$b_{11} = a_{22}, \quad a_{11} + a_{22} + a_{12} = 1.$$

Si consideri poi la trasformazione  $T''$  subordinata, sempre secondo BOMPIANI, dalla  $T$  sino all'intorno del secondo ordine, tra i piani  $x_1 = 0$ ,  $\bar{x}_1 = 0$  relativamente alla retta  $x_2 = x_3 = 0$ . Delle tre rette inflessionali su  $x_1 = 0$  due coincidono con la  $x_1 = x_3 = 0$  e l'altra

(3) E. BOMPIANI, *Sulle corrispondenze puntuali tra spazi proiettivi*, « Rend. Acc. Lincei », Ser. VIII, Vol. VI, 1949, p. 150.

(4) Per il riferimento intrinseco relativo ad un  $E_6$  di curva piana cfr. E. BOMPIANI, *Geometria proiettiva degli elementi differenziali*, Litografie, Roma.

con la  $x_1 = x_2 = 0$ . Si assuma il punto improprio di  $\bar{x}_1 = \bar{x}_3 = 0$  come corrispondente di quello di  $x_1 = x_2 = 0$  nella proiettività caratteristica relativa a queste due rette e si ha quindi  $\alpha_{12} = 0$ .

Sfruttando un'analogia trasformazione subordinata tra i piani  $x_2 = \bar{x}_2 = 0$ , che si verifica facilmente essere osculabile con una omografia, si può infine far corrispondere al punto improprio di  $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$  quello di  $x_2 = x_3 = 0$  nella suddetta omografia ed allora  $\alpha_{11} = 0$ .

In definitiva le equazioni della  $T$  si riducono alle

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + x_2^2 + [3] \\ \bar{x}_2 &= x_2 + x_1^2 - x_2 x_3 + [3] \\ \bar{x}_3 &= x_3 + x_1 x_2 + [3]. \end{aligned}$$

Come si vede nell'intorno del 2° ordine non esistono invarianti.

**3. Trasformazioni cubiche osculatrici** <sup>(5)</sup>. - Per determinare le  $\infty^9$  trasformazioni cubiche osculatrici la (2.5) si consideri la  $V_6$  di  $S_{15}$  immagine delle coppie di punti di  $S_3$  ed  $\bar{S}_3$ .

La  $V_3$  immagine della  $T$  (2.5) sarà osculata dalle  $V_3^*$  ottenute segnando la  $V_6$  con gli  $\infty^9 S_{12}$  passanti per l' $S$  (2) osculatore in  $O'$  (immagine della coppia  $O, \bar{O}$ ) alla  $V_3$ . Queste  $\infty^9 V_3^*$  rappresentano le  $\infty^9$  trasformazioni cubiche osculatrici la  $T$ .

Esse hanno in coordinate omogenee equazioni

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \left| \begin{array}{cc} x_1 - \alpha_1 x_1 + x_2 + \alpha_3 x_3 & \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \\ x_2 - \beta_1 x_1 + (\beta_3 - 1)x_3 - x_4 & \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 \\ x_3 - \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_3 & \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_3 + x_4 \end{array} \right| \\ \bar{x}_2 &= \left| \begin{array}{cc} \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 - x_4 & x_1 \quad \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \\ x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_3 & x_2 \quad \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 \\ (1 + \gamma_1)x_2 + \gamma_2 x_3 & x_3 \quad \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_2 + x_4 \end{array} \right| \\ \bar{x}_3 &= \left| \begin{array}{cc} \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 - x_4 & \alpha_1 x_1 - x_2 - \alpha_3 x_3 & x_1 \\ x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_3 & \beta_1 x_1 - (\beta_3 - 1)x_3 + x_4 & x_2 \\ (1 + \gamma_1)x_2 + \gamma_2 x_3 & \gamma_1 x_1 - \gamma_3 x_3 & x_3 \end{array} \right| \\ \bar{x}_4 &= \left| \begin{array}{cc} \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 - x_4 & \alpha_1 x_1 - x_2 - \alpha_3 x_3 & \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 \\ x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_3 & \beta_1 x_1 - (\beta_3 - 1)x_3 + x_4 & \beta_2 x_1 + \beta_3 x_3 \\ (1 + \gamma_1)x_2 + \gamma_2 x_3 & \gamma_1 x_1 - \gamma_3 x_3 & \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_3 + x_4 \end{array} \right| \end{aligned}$$

ove le  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono i 9 parametri.

<sup>(5)</sup> In questo numero si segue il metodo usato da M. VILLA nella terza delle Note citate nella <sup>(4)</sup>, per determinare le trasformazioni cubiche osculatrici una generica trasformazione puntuale tra due  $S_7$ .

4. **Intorno del 3° ordine.** - Per finire di determinare i riferimenti intrinseci nei due spazi, basterà fissare in modo intrinseco il piano  $x_3 = 0$  di  $S_3$  perchè allora, per ciò che si è fatto nel n. 2, rimarrà determinato anche il piano  $\bar{x}_3 = 0$  in  $\bar{S}_3$ .

Si consideri pertanto la calotta del terzo ordine  $\sigma_3$  corrispondente in  $T$  a quella inflessionale  $\bar{x}_3 = 0$  e si assuma come retta impropria di  $x_3 = 0$  quella corrispondente alla  $x_1 = x_2 = 0$  nella polarità di DARBOUX relativa alla  $\sigma_3$ .

Si consideri infine l' $E_3$  intersezione della calotta  $\sigma'_3$  corrispondente in  $T$  alla  $\bar{\sigma}'_3$   $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$  con il piano  $x_2 = x_3$ . Tale  $E_3$  determina una proiettività tra i punti della tangente  $x_1 = x_2 = x_3$  e le rette per  $O$  del piano  $x_2 = x_3$  <sup>(6)</sup>; si può quindi assumere come punto improprio di  $x_1 = x_2 = x_3$  quello corrispondente a  $x_1 = x_3 = 0$  nella suddetta proiettività.

In relazione a questa scelta dei due riferimenti nei due spazi le equazioni della  $T$  assumono la forma

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 + x_2^2 + \psi_1(x_1, x_2, x_3) + [4] \\ \bar{x}_2 &= x_2 + x_1^2 - x_2x_3 + \psi_2(x_1, x_2, x_3) + [4] \\ \bar{x}_3 &= x_3 - x_1x_2 + \psi_3(x_1, x_2, x_3) + [4],\end{aligned}$$

ove, essendo  $\psi_i$  forme di terzo grado nelle  $x_i$  posto

$$\psi_3 = \sum c_{ijk} x_i x_j x_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

si ha

$$c_{112} = c_{122} = 0, \quad \psi_2(1, 1, 1) - \psi_1(1, 1, 1) = 2.$$

In tal modo nell'intorno del 3° ordine esistono 27 invarianti.

In una prossima nota mi riprometto di considerare in questo caso e nel caso generale, il cono del sesto ordine e genere tre, luogo delle coincidenze dell'involuzione del 2° ordine nella stella di centro  $O$ , di cui si parla nella premessa.

(6) La proiettività è quella subordinata dalla polarità relativa ad una qualunque delle coniche del fascio aventi l' $E_3$  in comune, cfr. E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », Ser. VI, Vol. XXII, 1935, p. 486.