Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 123–131.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna).

Sunto. *Si ottengono alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi, relative alle direzioni e giaciture caratteristiche.*

1. Lo studio delle trasformazioni puntuali fra due spazi S_3 per le quali in ogni coppia regolare di punti corrispondenti si ha coincidenza di tutte le direzioni caratteristiche ([1]) mi ha condotto ad alcune proprietà che espongo, a parte, in questa Nota perchè si tratta di proprietà non esclusivamente pertinenti alle trasformazioni predette.

Nei nn. 2, 3 determino le condizioni affinchè, in ogni coppia regolare di punti corrispondenti in una trasformazione T, una coppia di direzioni caratteristiche sia inflessionale di 2ª specie anzichè di 1ª specie, come accade in generale. La circostanza predetta si verifica per alcuni tipi di trasformazioni fra quelle menzionate in principio ([2]) e non può invece verificarsi per altri tipi.

Nel n. 4 considero quelle trasformazioni per le quali in ogni coppia di punti corrispondenti vi sono calotte piane del secondo ordine corrispondenti (e dirò allora che vi sono *giaciture caratteristiche*) e particolarmente considero il caso in cui vi sono superficie inviluppate da quelle calotte (che chiamerò *superficie caratteristiche*) e la corrispondenza subordinata fra coppie di tali superficie.

Infine nel n. 5 mostro come le giaciture e superficie caratteristiche diano luogo sulla varietà di C. SEGRE, rappresentativa delle coppie di punti di due spazi, a comportamento quasi–asintotico

([1]) Tale studio è oggetto di un mio lavoro, in corso di pubblicazione, dal titolo: *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi che posseggono un'unica congruenza di curve caratteristiche*. Per ciò che riguarda la definizione di direzioni caratteristiche e degli altri enti che nomineremo vedasi: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Note I, II, III. « Rend. Acc. Naz. Lincei », 8, (4) 1948, pp. 55-61, 192-106, 295-303.

([2]) Nel caso di trasformazioni fra piani l'analoga ricerca è stata fatta, con mezzi diversi, da G. VAONA nella comunicazione al IV Congresso U. M. I. dal titolo: *Sulle trasformazioni puntuali di 2ª e 3ª specie fra piani.*

(a tre indici [3]) per la varietà rappresentativa di una trasformazione.

Faccio uso di concetti introdotti da E. Čech [4] e, come quel- l'Autore, dei metodi di E. Cartan [5].

2. Data una trasformazione T fra due spazi S, $\overline{S}$ [6], associamo a ciascun punto della coppia di punti corrispondenti A, B un tetraedro di riferimento (proiettivo) i cui ulteriori vertici indichiamo con A_i, B_i $(1 = 1, 2, 3)$. Valgano le solite formule:

$$\begin{aligned} &(1) && dA = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 ; \\ & && dB = \tau_{00}B + \tau_1 B_1 + \tau_2 B_2 + \tau_3 B_3 , \\ &(1') && dA_i = \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 ; \\ & && dB = \tau_{i0}B + \tau_{i1}B_1 + \tau_{i2}B_2 + \tau_{i3}B_3 . \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dalle quali si ricavano, per differenziazione esterna, le *equazioni di struttura*, ben note, che non scriveremo. Se i punti A, A_i e B, B_i si corrispondono in una *omografia tangente* K, cioè se

$$K \cdot A = B, \qquad K \cdot A_i = B_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

si avrà

$$(2) \qquad \omega_i = \tau_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$(3) \qquad K \cdot dA = dB - (\tau_{00} - \omega_{00})B.$$

Com' è ben noto [7], esistono tre forme quadratiche nelle ω_i

$$(4) \qquad \Omega_i = \sum_{r,s}^{3} {}_{1}\, c^i_{rs}\,\omega_r\,\omega_s \qquad (c^i_{rs} = c^i_{sr})$$

che dipendono da K e tali che

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_r} = \begin{cases} \tau_{ri} - \omega_{ri} & \text{se} \quad i \neq r \\ \tau_{ii} - \omega_{ii} - \tau_{00} + \omega_{00}, & \text{se} \quad i = r. \end{cases} \qquad (i, r = 1, 2, 3)$$

[3] Le quasi-asintotiche a tre indici sono state introdotte nel lavoro: M. Villa e G. Vaona, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 8, pp. 470-476 (1950).

[4] E. Čech, *Géométrie projective differentielle des correspondances entre deux éspaces*, I, II, III. « Čas. pro pěst. Mat. a Fis. », 74, 75 (1950), pp. 32-48, 123-136, 137-157.

[5] E. Cartan, *Les systemes differentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Paris, Hermann, 1945.

[6] In questa Nota tratteremo solo il caso di spazi ordinari S_3. Tuttavia molti dei risultati possono venir estesi, senza difficoltà, al caso di S_n qualsiansi.

[7] Si veda il lavoro citato in [4].

Le direzioni caratteristiche di T relative alla coppia A, B sono quelle corrispondenti alle ω_i che annullano la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \omega_i \\ \Omega_i \end{matrix} \right\| \text{ (}^8\text{)}; \tag{6}$$

se le ω_i relative ad una direzione caratteristica annullano le singole Ω_i si dice, con E. ČECH, che la direzione è K-principale [9].

Per un'altra qualsiasi delle ∞^3 omografie tangenti K^* si ha

$$K^* \cdot A = B, \qquad K^* \cdot A_i = B_i - \lambda_i B, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

la quantità λ_i essendo quelle che fissano l'omografia K^*.

Si ha poi immediatamente

$$\overset{i*}{c_{rs}} = c^i{}_{rs} - \delta^i{}_r \lambda_s - \delta^i{}_s \lambda_r \tag{7'}$$

le $\delta^j{}_i$ essendo tali che $\delta^i{}_i = 1$, $\delta^j{}_i = 0$ per $i \neq j = 1, 2, 3$. Esiste una omografia tangente relativamente alla quale si ha

$$\begin{aligned} c^1{}_{11} + c^2{}_{12} + c^3{}_{13} &= 0 \\ c^1{}_{21} + c^2{}_{22} + c^3{}_{23} &= 0 \\ c^1{}_{31} + c^2{}_{32} + c^3{}_{33} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

essa dicesi, con E. ČECH, l'*omografia locale* K_0. Se, come si può sempre supporre, è

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0 \text{ (}^{10}\text{)},$$

allora quando A, A_i e B, B_i si corrispondono in K_0 si ha

$$\omega_{00} = \tau_{00}. \tag{9}$$

Ciò posto supponiamo di aver scelto il riferimento in modo che la direzione $\omega_1 = \omega_2 = 0$ sia caratteristica. Vogliamo imporre che quella direzione sia inflessionale di 2ª specie, vale a dire tale che ad un E_3 di flesso di 2ª specie di centro A e direzione $\omega_1 = \omega_2 = 0$

(8) Benchè le Ω_i dipendano dalla omografia K, le forme cubiche $\omega_i \Omega_j - \omega_j \Omega_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$ non dipendono da K. Si confronti infatti con le (7').

(9) Il significato geometrico di K-principale (che sostanzialmente trovasi già in ČECH, op. cit. in (4)) è il seguente: ogni direzione caratteristica è K-principale per quelle omografie tangenti K che subordinano la relativa *proiettività caratteristica* del VILLA (per questa Cfr. l'op. cit. in (4)).

(10) Per questo basta fissare il fattore di proporzionalità delle coordinate dei punti A, A_i e B, B_i in modo che sia: $(AA_1A_2A_3) = (BB_1B_2B_3) = 1$.

corrisponda un $\bar{E}_3$ uscente da B anch'esso di flesso di 2ª specie e non di 1ª specie soltanto, come accade in generale. Intanto essendo $\omega_1 = \omega_2 = 0$ caratteristica dovrà essere

$$c^1_{33} = c^2_{33} = 0 ; \tag{10}$$

nella direzione $\omega_1 = \omega_2 = 0$ si ha poi, nello spazio di A,

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_3 A_3 \\ d^2A &= [\ldots]A + [\omega_3\omega_{31} + d\omega_1]A_1 + [\omega_3\omega_{32} + d\omega_2]A_2 + \\ &\quad + [\omega_3(\omega_{00} + \omega_{33}) + d\omega_3]A_3 \end{aligned} \tag{11}$$

dove il coefficiente di A non interessa e le forme di PFAFF che intervengono debbono essere calcolate tenendo conto di $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Analoghe formule si hanno per lo spazio di B. Calcolando poi d^3A su un E_2 di flesso di centro A e direzione $\omega_1 = \omega_2 = 0$ si trova

$$\begin{aligned} d^3A = [\ldots]A &+ \{ [(\omega_{00} + \omega_{33})\omega_3 + d\omega_3]\omega_{31} + d(\omega_3\omega_{31} + d\omega_1) \} A_1 + \\ &+ \{ [(\omega_{00} + \omega_{33})\omega_3 + d\omega_3]\omega_{32} + d(\omega_3\omega_{32} + d\omega_2) \} A_2 + [\ldots]A_3 \end{aligned} \tag{12}$$

con le stesse avvertenze che per la (11). Il confronto con le analoghe formule relative allo spazio di B. quando si tenga presente il verificarsi identico della (10) che si è supposto (11), fornisce le condizioni

$$\begin{aligned} (\tau_{33} - \omega_{33} + \tau_{00} - \omega_{00})\omega_{31} &= 0 \\ (\tau_{33} - \omega_{33} + \tau_{00} - \omega_{00})\omega_{32} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

affinchè in ogni coppia la direzione caratteristica $\omega_1 = \omega_2 = 0$ sia inflessionale di 2ª specie; beninteso le forme che compaiono in (13) vanno calcolate nella direzione $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Le (13) sono verificate se

$$\begin{cases} \omega_{31} = h\omega_1 + k\omega_2 \\ \omega_{32} = l\omega_1 + m\omega_2 \end{cases} \tag{14}$$

oppure se

$$c^3_{33} - c^1_{13} - c^2_{23} = 0 \tag{14'}$$

nel primo caso: *le curve caratteristiche* $\omega_1 = \omega_2 = 0$ *sono rette* (12); nel secondo caso invece si ha che: *la direzione caratteristica* $\omega_1 = \omega_2 = 0$ *è* K_0*-principale* (13).

(11) Perchè si è supposto $\omega_1 = \omega_2 = 0$ caratteristica.

(12) Ciò risulta subito dal fatto che, sussistendo le (14), le curve caratteristiche $\omega_1 = \omega_2 = 0$ hanno in ogni loro punto un flesso.

(13) Per la caratterizzazione geometrica dell'omografia locale K_0 si veda: M. VILLA, *Per una geometria proiettivo-differenziale in grande delle trasformazioni puntuali.* « Atti IV Congresso U. M. I. » (Taormina, 1951).

3. Le trasformazioni T per le quali coincidono tutte le direzioni caratteristiche per ogni coppia regolare di punti corrispondenti possono essere di quattro tipi a seconda che per le cubiche piane, le cui equazioni (ω_1, ω_2, ω_3 coordinate proiettive omogenee) si ottengono annullando i minori di (6), si presenti l'una delle seguenti possibilità:

(*a*) le cubiche hanno in comune un E_6 regolare [14];

(*b*) le cubiche hanno un punto doppio a tangenti distinte in comune, tale che quelle tangenti siano fisse e vi sia contatto semplice dei rami tangenti all'una e contatto del 2° ordine dei rami tangenti all'altra;

(*c*) le cubiche hanno un punto doppio in comune, con una tangente fissa e l'altra variabile, essendovi contatto del 3° ordine fra i rami tangenti alla retta fissa;

(*d*) le cubiche hanno una cuspide e la tangente cuspidale in comune, essendovi un punto comune ai rami del 2° ordine oltre a quelli dovuti alla coincidenza delle tangenti cuspidali.

Si verifica immediatamente che le Ω_i si possono ridurre alle forme seguenti: [15]

$$\text{(15)}\quad \begin{aligned}
&(a)\ \Omega_1 = 2\alpha\omega_2^2, \quad \Omega_2 = -2\alpha\omega_1^2 - 2\alpha\omega_2\omega_3, \quad \Omega_3 = 2\alpha\omega_1\omega_2;\\
&(b)\ \Omega_1 = 2\alpha\omega_1\omega_2, \quad \Omega_2 = 2\beta\omega_2^2, \quad \Omega_3 = 2(\beta-\alpha)\omega_1^2 + 2\gamma\omega_1\omega_2 + \\
&\qquad\qquad + 2\delta\omega_2^2 + 2\beta\omega_2\omega_3\\
&(c)\ \Omega_1 = -2\alpha\omega_1\omega_2 + 2(3\alpha-\beta)\omega_2^2, \quad \Omega_2 = -2\alpha\omega_2^2, \quad \Omega_3 = 2\alpha\omega_1^2 + \\
&\qquad\qquad + 2\beta\omega_1\omega_2 + 2\gamma\omega_2^2\\
&(d)\ \Omega_1 = 2\alpha\omega_2^2, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = -2\alpha\omega_1^2 + 2\beta\omega_1\omega_2 + 2\gamma\omega_2^2.
\end{aligned}$$

Le (15) mostrano che le (*b*), (*c*), (*d*) soddisfano alla condizione (14') mentre le (*a*) non possono mai soddisfarla. Si può del resto osservare che le cubiche piane di cui s'è detto in principio di

[14] Si verifica facilmente che il caso di un E_6 contenente un elemento di flesso non si può presentare.

[15] Con una opportuna scelta dei riferimenti. Si noti che i relativi *sviluppi locali* fino al secondo ordine, in coordinate proiettive non omogenee sono

$$\bar{x} = x + \Omega_1(x,\ y,\ z) + [3], \qquad \bar{y} = y + \Omega_2(x,\ y,\ z) + [3]$$
$$\bar{z} = z + \Omega_3(x,\ y,\ z) + [3]$$

dove $\Omega_i(x, y, z)$ indica il polinomio in x, y, z che si ottiene da Ω_i sostituendo ad ω_1, ω_2, ω_3 rispettivamente x, y, z. Maggiori dettagli trovansi nel lavoro citato in [1].

questo n. hanno il punto $\omega_1 = \omega_1 = 0$ doppio se, e solo se,

$$c^1_{23} = c^2_{13} = c^3_{33} - 2c^1_{13} = c^3_{32} - 2c^2_{23} = 0$$

ne discende che:

In ogni trasformazione che, per ogni coppia regolare di punti corrispondenti, abbia almeno quattro delle direzioni caratteristiche coincidenti (ma non infinitamente vicine su una sola falda lineare di cono), la direzione caratteristica multipla è inflessionale di 2ª *specie almeno.*

4. Passiamo alla considerazione delle *giaciture* e *superficie caratteristiche.* Siano A, B due punti corrispondenti in una trasformazione T (regolare nell'intorno della coppia), vogliamo anzitutto fare alcune osservazioni di carattere locale e di semplice verifica. Condizione necessaria e sufficiente perchè una giacitura sia caratteristica è che contenga tre (almeno) direzioni caratteristiche ([16]). Consideriamo poi le ∞^3 calotte di superficie, del secondo ordine, di centro A e dato piano tangente π, e fra quelle le ∞^1 calotte che hanno date tangenti asintotiche, ebbene le ∞^1 calotte a quelle corrispondenti, le quali hanno centro in B e sono ivi tangenti ad un piano $\overline{\pi}$, hanno per tangenti asintotiche le coppie di rette di una involuzione. Se il piano π contiene una direzione caratteristica oppure due, la involuzione relativa a quelle calotte che hanno una oppure due tangenti asintotiche a direzione caratteristica, nel piano $\overline{\pi}$, viene ad avere una retta fissa (degenera) oppure si riduce ad una coppia fissa. Se, e solo se, il piano π è a giacitura caratteristica alle tangenti asintotiche di una qualsivoglia calotta tangente a π corrispondono, in una omografia tangente a T, le tangenti asintotiche della calotta corrispondente in T.

Osserviamo ancora che riguardo alle trasformazioni T che posseggono giaciture caratteristiche si possono presentare le seguenti eventualità (localmente):

1) nella coppia regolare A, B vi sono ∞^1 giaciture caratteristiche. Le direzioni caratteristiche relative alla coppia sono anch'esse ∞^1 e costituiscono un cono quadrico (eventualmente degenere) ed una ulteriore direzione caratteristica d. Le ∞^1 giaciture sono quelle di un fascio di asse d; e viceversa.

2) vi è soltanto un numero finito ν di giaciture caratteristiche e si ha $1 \leq \nu \leq 6$. Se poi una giacitura caratteristica contiene infinite direzioni caratteristiche ve ne sono, al più, altre tre.

([16]) Se ne contiene più di tre ne contiene allora ∞^1.

Relativamente alle trasformazioni di cui s'è detto nel n. 3, le (15) mostrano che quelle di tipo (*a*) non posseggono mai giaciture caratteristiche, quelle del tipo (*b*) ne posseggono due e quelle dei tipi (*c*) e (*d*) una sola ([17]).

Si vede anzi subito che le trasformazioni di cui nell'enunciato in fine del n. 3 posseggono sempre giaciture caratteristiche.

Nel caso (1), supposto verificato in *ogni* coppia regolare, i piani contenenti le giaciture raratteristiche inviluppano superficie (caratteristiche) dipendenti da una funzione arbitraria di un argomento; nel caso (2) invece quei piani non inviluppano, in generale, superficie e se lo fanno, quelle superficie dipendono da una costante arbitraria.

Supposta l'esistenza di superficie caratteristiche, vogliamo esaminare la corrispondenza subordinata da T fra due tali superficie corrispondenti. Scegliamo il riferimento in modo che la giacitura $\omega_3 = 0$ sia caratteristica, dovrà essere

$$c^3_{11} = c^3_{12} = c^3_{22} = 0 \tag{16}$$

e le tre direzioni caratteristiche contenute nella giacitura saranno date da

$$c^2_{11}\omega^3_1 + (2c^2_{12} - c^1_{11})\omega^2_1\omega_2 + (c^2_{22} - 2c^1_{12})\omega_1\omega^2_2 - c^1_{22}\omega^3_2 = 0. \tag{17}$$

Affinchè i piani delle giaciture caratteristiche inviluppino superficie la equazione $\omega_3 = 0$ deve essere integrabile e pertanto il differenziale esterno $[d\omega_3]$ deve annullarsi per $\omega_3 = 0$. Si ha

$$[d\omega_3] = [\omega_3(\omega_{33} - \omega_{00})] + [\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}]$$

e perciò, nell'ipotesi fatta, dovrà aversi

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2 + h\omega_3 \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2 + k\omega_3. \end{aligned} \tag{28}$$

La forma differenziale quadratica delle asintotiche di una superficie caratteristica, integrale di $\omega_3 = 0$, è ([18]) nello spazio di A,

$$\varphi = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} \qquad (\text{per } \omega_3 = 0)$$

cioè

$$\varphi = a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2. \tag{19}$$

([17]) Maggiori dettagli, anche a questo proposito, trovansi nell'op. cit. in ([1]).

([18]) Si veda ad esempio: E. CARTAN, *Sur la deformation projective des surfaces*, « Ann. Ec. Normale Sup. », 3 (37) 1920.

Dalla (16) si ha che

$$\tau_{13} - \omega_{12} = c^3{}_{13}\omega_3$$
$$\tau_{23} - \omega_{23} = c^3{}_{23}\omega_3$$

ne discende che la forma differenziale delle asintotiche della superficie corrispondente alla precedente, per T, nello spazio di B, è ancora (19). Viceversa se si considerano due superficie corrispondenti in T, si può supporre che su di esse sia $\omega_3 = 0$, e se T muta la forma quadratica delle asintotiche dell'una in quella dell'altra allora debbono verificarsi le (16), dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie, corrispondenti in una trasformazione T, *siano caratteristiche per* T *è che* T *muti l'una nell'altra le forme differenziali quadratiche delle asintotiche delle due superficie.*

Supponiamo ora che sia $b^2 - ac \neq 0$ (19); allora si può scegliere il riferimento in modo che risulti $a = c = 0$, $b = 1$. Allora la forma cubica

$$\Phi = \omega_1{}^2\omega_{12} + \omega_1\omega_2(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33}) + \omega_2{}^2\omega_{21} \qquad (\text{per } \omega_3 = 0)$$

è quella che fornisce tangenti di Darboux alla superficie caratteristica dello spazio di A, quando il riferimento in quello spazio sia opportunamente scelto. Vale a dire che le tangenti di Darboux sono date dalla

$$\Phi + \omega_1\omega_2(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)$$

per opportuni λ e μ. Analogamente le tangenti di Darboux alla superficie caratteristica nello spazio di B sono date dalla

$$\overline{\Phi} + \omega_1\omega_2(\overline{\lambda}\omega_1 + \overline{\mu}\omega_2)$$

per opportuni $\overline{\lambda}$ e $\overline{\mu}$, essendo

$$\overline{\Phi} = \omega_1{}^2\tau_{12} + \omega_1\omega_2(\tau_{11} + \tau_{22} - \tau_{00} - \tau_{33}) + \omega_2{}^2\tau_{21} \qquad (\text{per } \omega_3 = 0)$$

Si vede facilmente che, scegliendo come omografia tangente K a T una nella quale si corrispondano riferimenti legati alle due superficie caratteristiche per i quali Φ e $\overline{\Phi}$ siano le relative forme di Darboux (20), si deve avere

$$2c^2{}_{12} + c^1{}_{11} - c^3{}_{13} = 2c^1{}_{12} + c^2{}_{22} - c^3{}_{23} = 0$$

(19) Non insisteremo sull'esame degli altri casi possibili. Supporremo anzi che le superficie caratteristiche siano non rigate.

(20) Si vede facilmente che deve sempre esistere, nelle condizioni supposte, qualche omografia tangente nella quale si corrispondono quei riferimenti (cfr op. cit. in (18)) per cui le forme Φ e $\overline{\Phi}$ diventano quelle relative alle tangenti di Darboux.

e

$$\overline{\Phi} - \Phi = c^2_{11}\omega_1^3 + c^1_{22}\omega_2^3. \tag{20}$$

La (20) permette di affermare, tenendo conto di (17), che:

Date due superficie caratteristiche corrispondenti di una trasformazione T, *se le asintotiche dei due sistemi (supposte le superficie non rigate) sono curve caratteristiche di* T *allora la corrispondenza subordinata fra le due superficie è una applicabilità proiettiva, e viceversa.*

In particolare quanto si dice nell' enunciato precedente si verifica se le direzioni caratteristiche, appartenenti alle giaciture dei piani tangenti alle superficie caratteristiche, sono ∞^1.

5. Se si considera la V_3 rappresentativa di una trasformazione T sulla V_6 di C. SEGRE (che rappresenta le coppie di punti dei due spazi corrispondenti) è noto [21] che le coppie di curve caratteristiche corrispondenti di T danno luogo a curve quasi-asintotiche a tre indici $\gamma_{1,2,3}$ di (V_3, V_6). Ebbene si verifica senza difficoltà che sussiste la seguente proposizione:

Una coppia di superficie caratteristiche corrispondenti in una trasformazione T *dà luogo, in generale* [22] *sulla* V_3 *rappresentativa di* T *della* V_6 *di C. Segre ad una superficie quasi-asintotica* $\overset{3}{\sigma}_{1,2,3}$ *di* (V_3, V_6), *e viceversa.*

Se la trasformazione T possiede giaciture caratteristiche senza possedere superficie caratteristiche la relativa V_3 possiede calotte del primo ordine di superficie quasi-asintotica $\overset{3}{\sigma}_{1,2,3}$ (in generale) di (V_3, V_6) senza possedere superficie quasi-asintotiche di quel tipo.

(21) Si veda M. VILLA e G. VAONA, op. cit. in (3).

(22) *In generale*, si riferisce alla *specie* delle quasi-asintotiche, la quale, in vece di 3, può essere anche 4 in casi speciali.