BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLA GANDINI

Un teorema di A. E. Ingham sui "Grandi indici".

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 143–148.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_143_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Un teorema di A. E. Ingham sui " Grandi indici ".

Nota di Carla Gandini (a Milano).

Sunto. - *Si dà una nuova dimostrazione di un teorema di tipo tauberiano di* A. E. Ingham *per le serie di* Dirichlet *generali, riguardante il cosiddetto caso « dei grandi indici » nel quale l'intenso aumentare dell'indice dispensa da condizioni attinenti al coefficiente: la dimostrazione si basa su una classica proposizione di* G. H. Hardy *e* J. E. Littlewood *e segue un metodo già usato da* G. Ricci; *essa ci sembra semplice e naturale.*

1. Una interessante Nota di A. E. Ingham del 1937 (1) è destinata allo studio del cosiddetto « Teorema degli alti indici » di G. H. Hardy e J. E. Littlewood, cioè di quel teorema che inverte il teorema di Abel per le serie di Dirichlet (generali) con la sola ipotesi relativa alla successione $\{\lambda_n\}$ degli « indici » $\left(\text{e cioè } \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq c > 1\right)$, che traduce l'intenso aumentare degli indici stessi. Il risultato di A. E. Ingham contiene la proposizione seguente, da lui esplicitamente enunciata come la più espressiva:

« Sia

$$f(s) = \sum_1^{\infty}{}_n\, a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots; \quad \lambda_n \to +\infty; \quad a_n \text{ reale}) \tag{1}$$

convergente per ogni $s > 0$.

Se

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to +\infty \quad \text{per} \quad n \to +\infty \tag{2}$$

e se $f(s)$ si mantiene limitata per $s \to 0$, allora

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\ (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \overline{\lim_{s \to 0}}\ f(s) \text{ ».}$$

In questa Nota ci proponiamo di mostrare che l'applicazione del metodo seguito da G. Ricci (1934) (2) per lo studio dello « scarto tauberiano » negli insiemi più generali e una classica proposizione di G. H. Hardy e J. E. Littlewood (1926) (3) conducono in modo naturale alla proposizione di A. E. Ingham.

(1) « The Quarterly Journal of Mathematics », Oxford Series, vol. 8 (1937), pp. 1-7.

(2) « Annali Matematica pura ed applicata », (4), 13, (1934-35), pp. 287-308.

(3) « Proc. London Math. Soc. », (2), 25 (1926), pp. 219-236, in particolare p. 225.

Il teorema di G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD è il seguente (si conservano le notazioni stabilite sopra):

Da

$$f(s) = O(1) \qquad \text{per} \qquad s \to 0,$$

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqq c > 1,$$

segue

$$a_n = O(1) \text{ ».}$$

Poniamo

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n, \qquad (A(x) = 0 \quad \text{per} \quad x < \lambda_1)$$

(funzione reale) e domandiamoci:

È possibile scegliere una successione

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n, \ldots \quad (x_n \to +\infty),$$

tale che

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\, A(x_n) = \overline{\lim_{s \to 0}}\, f(s)\,?$$

E questa scelta può essere fatta in guisa che l'ipotesi $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to +\infty$ consenta di sostituire al tendere $x \to +\infty$ lungo la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, il tendere $x \to +\infty$ lungo tutto il semiasse reale positivo?

Vedremo che tutto ciò è possibile.

2. Cominciamo con l'osservare che l'ipotesi (2) $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to +\infty$, porta di conseguenza

$$\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n} \to +\infty;$$

pertanto la funzione $A(x)$ si mantiene costante per tratti $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ di ampiezza relativa, che tende all'infinito.

Poniamo

$$x_n = \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2},$$

(punto medio del tratto), allora evidentemente

$$\lambda_{n+1} - x_n = x_n - \lambda_n = x_n \cdot \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} + \lambda_n}.$$

Fissato $c > 1$, per l'ipotesi (2) risulta

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > c \quad (> 1), \qquad \text{per} \qquad n \geqq n_0(c)$$

e quindi anche

$$\lambda_{n+1} - x_n = x_n - \lambda_n > x_n \cdot \frac{c-1}{c+1}$$

$$\lambda_n < x_n\left(1 - \frac{c-1}{c+1}\right) < x_n < x_n\left(1 + \frac{c-1}{c+1}\right) < \lambda_{n+1}.$$

Pertanto, fissato $H = \dfrac{c-1}{c+1}$ a partire da un certo x_{n_0} in poi, tutto l'intervallo

$$x_n, \quad x_n(1+H)$$

si trova interno al tratto corrispondente $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$; anzi possiamo affermare che:

Per

$$x \geqq x_0, \qquad x_0 = x_0(\mathrm{H}),$$

nell'intervallo

(3) $$x \leqq y \leqq x(1+H)$$

cade al più un solo punto λ_n.

Per il teorema di G. H. Hardy e J. E. Littlewood sopra ricordato, è

$$|a_n| < K,$$

e quindi l'unico salto nell'intervallo (3) è limitato.

Possiamo dunque affermare che:

esistono due numeri positivi H, K tali che per ogni

$$0 \leqq x \leqq y \leqq x(1+H),$$

risulta

$$|A(y) - A(x)| < K.$$

Sono pertanto verificate le ipotesi di un lemma di T. Vijayaraghavan che afferma [4]

$$A(x) = O(1) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

3. Scriviamo $f(s)$ sotto forma di integrale:

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_n e^{-\lambda_n s} =$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \left\{ \sum_{1}^{m-1}{}_n A(\lambda_n)(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A(\lambda_m)e^{-\lambda_m s} \right\} =$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \sum_{1}^{m-1}{}_n A(\lambda_n) s \int_{\lambda_n}^{\lambda n+1} e^{-su}\, du = s \int_0^{+\infty} e^{-su} A(u)\, du.$$

[4] Per tale lemma, che richiede ipotesi di tipo soltanto unilaterale, vedere T. Vijayaraghavan, « Journal London Math. Soc. », 1 (1926), pp. 113-120;

Sappiamo che esiste K_2 tale che

$$|A(x)| < K_2 \qquad \text{(per ogni } x > 0)$$

e poniamo

$$\overline{\lim_{s \to 0}} f(s) = A \pm \frac{1}{2}\Omega. \tag{4}$$

Si tratta di dimostrare (nell'ipotesi $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to +\infty$) che

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} A(x) = A \pm \frac{1}{2}\Omega.$$

È evidente che, per il teorema diretto (del tipo di Abel), gli estremi oscillatori di $A(x)$ comprendono quelli di $f(s)$ e pertanto basta dimostrare (limitandoci da una sola parte) che

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} A(x) \leqq \overline{\lim_{s \to 0}} f(s).$$

Procediamo per assurdo e supponiamo che esista un numero $h > 0$ (indipendente da x) tale che

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} A(x) > A + \frac{1}{2}\Omega + 2h.$$

Si indichi con (X) l'insieme dei punti, per i quali si ha

$$A(x) \geqq A + \frac{1}{2}\Omega + h; \tag{5}$$

essendo $A(x)$ funzione a scala, questo insieme (X) è costituito da infiniti tratti (ξ, η) e l'ampiezza relativa di questi tratti tende all'infinito; cioè detta $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots.$ la successione dei tratti, risulta

$$\frac{\eta_n - \xi_n}{\xi_n} \to +\infty.$$

esso è stato rilevato e dimostrato da J. Karamata, « Mathematische Zeitschrift », 37 (1933), pp. 582-588; vedere anche G. Ricci (nota citata). Ne riporteremo qui l'enunciato:

« Sia $f(s) = s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du$ convergente per ogni $s > 0$ e sia $A(y) - A(x) > -K$ per $0 \leqq x \leqq y \leqq x(1+H)$ (H e K indipendenti da x e y); allora da

$$f(s) = O(1) \qquad \text{per } s \to 0,$$

segue

$$A(x) = O(1) \qquad \text{per } x \to +\infty \text{ ».}$$

Introduciamo la seguente funzione ausiliaria:

$$B(x) = \begin{cases} -K_2 & \text{per } x \text{ fuori di } (X), \\ A + \frac{1}{2}\Omega + h & \text{per } x \text{ appartenente a } (X), \end{cases}$$

e poniamo

$$G(s) = s\int_0^{+\infty} e^{-su} B(u)\, du;$$

ne segue

$$G(s) < f(s). \tag{6}$$

Suddividiamo il semiasse reale positivo in tre parti e consideriamo i tre integrali corrispondenti

$$G(s) = s\left\{\int_0^{\xi} e^{-su}B(u)du + \int_{\xi}^{\eta} e^{-su}B(u)du + \int_{\eta}^{+\infty} e^{-su}B(u)du\right\} \geqq$$

$$\geqq -sK_2\int_0^{\xi} e^{-su}du + s\int_{\xi}^{\eta} e^{-su}du \left\{A + \frac{1}{2}\Omega + h\right\} - sK_2\int_{\eta}^{+\infty} e^{-su}du =$$

$$= -K_2(1 - e^{-s\xi}) + (A + \frac{1}{2}\Omega + h)(e^{-s\xi} - e^{-s\eta}) - K_2 e^{-s\eta}. \tag{7}$$

Si scelga adesso una successione di valori $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ tale che si abbia

$$s_n \to 0, \qquad s_n\xi_n \to 0, \qquad s_n\eta_n \to +\infty, \qquad \text{per } n \to +\infty;$$

per esempio $s_n = (\xi_n\eta_n)^{-1/2}$.

Con questa scelta risulta

$$1 - e^{-s_n\xi_n} \to 0, \quad e^{-s_n\xi_n} - e^{-s_n\eta_n} \to 1, \quad e^{-s_n\eta_n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Dalla (7):

$$G(s_n) \geq A + \frac{1}{2}\Omega + h + o(1) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Quando $n \to +\infty$,

$$x \to +\infty,\ su(X) \qquad \text{ed} \qquad s_n \to +0;$$

ora, se si considera la successione

$$G(s_1), \quad G(s_2), \quad \ldots, \quad G(s_n), \quad \ldots$$

si può affermare che:
se si ammette che esista un insieme (X) di valori x, per cui valga la (5), si deve pure ammettere l'esistenza di una successione

$\{ s_n \}$, con $s_n \to 0$ per $n \to +\infty$, per cui si verifichi:

$$G(s_n) \geq A + \frac{1}{2}\Omega + h + o(1) \qquad \text{per } s_n \to 0,$$

ovvero, per la (6),

$$f(s_n) \geq A + \frac{1}{2}\Omega + h + o(1) \qquad \text{per } s_n \to 0,$$

contro la (4).

Si conclude che

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} A(x) = A + \frac{1}{2}\Omega.$$

Analogamente si procede per dimostrare che è pure

$$\underline{\lim_{x \to +\infty}} A(x) = A - \frac{1}{2}\Omega.$$

Il teorema di A. E. Ingham risulta così dimostrato.