Letterio Toscano

Funzioni generatrici di particolari polinomi di Laguerre e di altri da essi dipendenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 160–167.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_160_0>

Funzioni generatrici di particolari polinomi di Laguerre e di altri da essi dipendenti.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si stabiliscono generatrici per particolari classi di polinomi di* LAGUERRE *e per altri ad essi legati.*

1. Riferiamoci ai polinomi di LAGUERRE generalizzati definiti dalle relazioni

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+\alpha} e^{-x}.$$

Sia data l'equazione in u

$$u = x + h\frac{1}{u}$$

con x reale positivo e h parametro variabile di modulo minore di $\frac{x^2}{4}$.

Per la radice maggiore $\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4h})$ consideriamo lo sviluppo di LAGRANGE

$$f(u) = f(x) + \sum_1^\infty{}_n \frac{h^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\varphi^n(x) f'(x)]$$

con $\varphi(u) = \frac{1}{u}$ e $f(u)$ funzione analitica.

Posto $f(u) = \int u^\alpha e^{-u} du$, sostituendo nella derivata rispetto a x dello sviluppo di LAGRANGE, e facendo $h = x^2 t$, si ha $\left(|t| < \frac{1}{4}\right)$

$$\sum_0^\infty{}_n t^n L_n^{(\alpha-2n)}(x) = \frac{(1 + \sqrt{1+4t})^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\sqrt{1+4t}} e^{\frac{x}{2}(1-\sqrt{1+4t})} \tag{1}$$

Se si considera l'equazione

$$u = x + hu^2 \qquad |h| < \frac{1}{4x}$$

e la sua radice minore $\frac{1}{2h}(1 - \sqrt{1 - 4hx})$, lo sviluppo di LAGRANGE con $\varphi(u) = u^2$, $f(u) = \int u^\alpha e^{-u} du$, $h = \frac{t}{x}$, ci da $\left(|t| < \frac{1}{4}\right)$

$$\sum_0^\infty{}_n t^n L_n^{(\alpha+n)}(x) = \frac{(1 - \sqrt{1-4t})^\alpha}{(2t)^\alpha \sqrt{1-4t}} e^{x\frac{\sqrt{1-4t}-1}{\sqrt{1-4t}+1}}. \tag{2}$$

2. I due precedenti sviluppi si possono ritrovare seguendo via diversa [1], che ci consentirà successivamente di pervenire ad altri risultati.

Si denoti con $f(x, t, \alpha)$ la somma della serie $\left(|t| < \frac{1}{4}\right)$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n\, t^n L_n^{(\alpha-2n)}(x).$$

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t, \alpha) = -t f(x, t, \alpha - 1),$$

$$f(0, t, \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, t^n \binom{\alpha - n}{n} = {}_2F_1\left(\frac{-\alpha+1}{2}, \quad \frac{-\alpha}{2}; \quad -\alpha; \quad -4t\right).$$

Ma [2]

$${}_2F_1(\alpha, \beta; 2\beta; x) = \left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2\alpha} {}_2F_1\left[\alpha, \alpha-\beta+\frac{1}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2\right]$$

e quindi

$$f(0, t, \alpha) = \frac{(1+\sqrt{1+4t})^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\sqrt{1+4t}}.$$

Allora

$$f(x, t, \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, \frac{f^{(n)}(0, t, \alpha)}{n!}\, x^n$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_n\, \frac{(-t)^n f(0, t, \alpha - n)}{n!}\, x^n = \frac{(1+\sqrt{1+4t})^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\sqrt{1+4t}}\, e^{\frac{x}{2}(1-\sqrt{1+4t})}.$$

A partire dalla serie $\left(|t| < \frac{1}{4}\right)$

$$f(x, t, \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, t^n L_n^{(\alpha+n)}(x)$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t, \alpha) = -t f(x, t, \alpha + 2)$$

$$f(0, t, \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, t^n \binom{\alpha + 2n}{n} = \frac{(1-\sqrt{1-4t})^{\alpha}}{(2t)^{\alpha}\sqrt{1-4t}};$$

[1] A. Angelesco, *Sur les fonctions génératrices des polynomes de Laguerre*, « Rend. Accad. Naz. Lincei-Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. », (5) 31 (1922), pp. 236-239.

[2] E. Goursat. *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique*, « Annales Scientifiques École Norm. Sup. », (2) 10 — supplément — (1881), pp. 3-142.

da cui

$$f(x,\ t,\ \alpha)=\sum_0^\infty{}_n \frac{(-t)^n f(0,\ t,\ \alpha+2n)}{n!}\, x^n=\frac{(1-\sqrt{1-4t})^\alpha}{(2t)^\alpha\sqrt{1-4t}}\, e^{x\frac{\sqrt{1-4t}-1}{\sqrt{1+4t}+1}}.$$

3. Consideriamo ora la serie convergente $(\alpha>-2)$

$$f(x,\ t,\ \alpha)=\sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+n+1\right)}\, L_n^{(\alpha+n)}(x).$$

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,\ t,\ \alpha)=-t f(x,\ t,\ \alpha+2)$$

e

$$f(0,\ t,\ \alpha)=\sum_0^\infty{}_n \frac{t^n\binom{\alpha+2n}{n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+n+1\right)}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\, {}_1F_1\left(\frac{\alpha+1}{2};\quad \alpha+1;\quad 4t\right).$$

Per la formula di KUMMER

$${}_1F_1\left(\frac{\alpha+1}{2};\ \alpha+1;\ u\right)=\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(\frac{-4i}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{u}{2}} J_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{-u}{2i}\right),$$

dove J_α è la funzione di BESSEL di prima specie e $i^2=-1$, segue

$$f(0,\ t,\ \alpha)=e^{2t}\left(\frac{-i}{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} J_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{-2t}{i}\right).$$

Allora

$$f(x,\ t,\ \alpha)=\sum_0^\infty{}_n \frac{(-t)^n f(0,\ t,\ \alpha+2n)}{n!}\, x^n$$

$$=e^{2t}\left(\frac{-i}{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\sum_0^\infty{}_n \frac{(ix)^n}{n!}\, J_{\frac{\alpha}{2}+n}\left(\frac{-2t}{i}\right).$$

Ma [3] $(t\neq x)$

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{(ix)^n}{n!}\, J_{\frac{\alpha}{2}+n}\left(\frac{-2t}{i}\right)=\left(\frac{t}{t-x}\right)^{\frac{\alpha}{4}} J_{\frac{\alpha}{2}}[2i\sqrt{t(t-x)}],$$

[3] B. VAN DER POL, *On the operational solution of linear differential equation*, « The London, Edinburg and Dublin Philosophical Magazine and Journ. Sci. », (7) 8 (1929), pp. 861-898.

per cui

$$f(x,\ t,\ \alpha) = \frac{e^{2t}}{[t(t-x)]^{\frac{\alpha}{4}}}\, i^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\frac{\alpha}{2}}[2i\sqrt{t(t-x)}] = \frac{e^{2t}}{[t(t-x)]^{\frac{\alpha}{4}}} I_{\frac{\alpha}{2}}[2\sqrt{t(t-x)}]$$

con $I_{\frac{\alpha}{2}}$ funzione di BESSEL ad argomento immaginario.

Vale pertanto lo sviluppo notevole $(t \neq x)$

$$(3) \qquad \sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+n+1\right)} L_n^{(\alpha+n)}(x) = \frac{e^{2t}}{[t(t-x)]^{\frac{\alpha}{4}}} I_{\frac{\alpha}{2}}[2\sqrt{t(t-x)}].$$

Per $\alpha = 0$ si ha uno sviluppo particolare di FELDHEIM [4], mentre per $\alpha = \pm 1$ se ne hanno altri due in cui si presentano le funzioni iperboliche.

4. Gli sviluppi (2) e (3) si riferiscono agli stessi polinomi $L_n^{(\alpha+n)}(x)$, e dal secondo si ritorna al primo con una trasformazione di LAPLACE.

Infatti [5]

$$\int_0^\infty e^{-(p-2)t} \frac{t^{\frac{\alpha}{4}}}{(t-x)^{\frac{\alpha}{4}}} I_{\frac{\alpha}{2}}[2\sqrt{t(t-x)}]\, dt = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{p^2-4p}} \frac{e^{-\frac{x}{2}(p-2-\sqrt{p^2-4p})}}{(p-2+\sqrt{p^2-4p})^{\frac{\alpha}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\frac{\alpha}{2}+n}\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+n+1\right)}{p^{\frac{\alpha}{2}+n+1}};$$

dalla (3) si ha

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{L_n^{(\alpha+n)}(x)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+n+1\right)} \int_0^\infty e^{-pt} t^{\frac{\alpha}{2}+n}\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} e^{2t} \frac{t^{\frac{\alpha}{4}}}{(t-x)^{\frac{\alpha}{4}}} I_{\frac{\alpha}{2}}[2\sqrt{t(t-x)}]\, dt,$$

e quindi

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{L_n^{(\alpha+n)}(x)}{p^n} = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}} p^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\sqrt{p^2-4p}} \frac{e^{-\frac{x}{2}(p-2-\sqrt{p^2-4p})}}{(p-2+\sqrt{p^2-4p})^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

[4] E. FELDHEIM, *Relations entre les polynomes de Iacobi, Laguerre et Hermite*, « Acta Mathematica », 75 (1942), pp. 117-138.

[5] N. W. MC LACHLAN et P. HUMBERT, *Formulaire pour le calcul symbolique*, « Mémorial des Sciences math. », fasc. C, Paris, 1941, p. 30.

Sostituendo in questa p con $\frac{1}{t}$ si riottiene facilmente lo sviluppo (2).

5. Inoltre gli sviluppi (2) e (3) si possono considerare quali casi particolari di uno sviluppo più generale. Considerata la serie

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{(\beta,\ n)}{\left(\frac{\alpha}{2}+1,\ n\right)} t^n L_n^{(\alpha+n)}(x), \qquad |t|<\frac{1}{4}, \qquad x<\frac{1+\sqrt{1-4t}}{1-\sqrt{1-4t}},$$

introdotta la funzione ipergeometrica confluente

$$\Phi_1(\alpha;\ \beta';\ \gamma;\ u\ ,v)=\sum_{m,\ n}^{0\ldots\infty}\frac{(\alpha,\ m+n)(\beta',\ n)}{(\gamma,\ m+n),m!\ n!}u^m v^n, \qquad |u|<1, \qquad |v|<1$$

e il suo sviluppo

$$\Phi_1(\alpha;\ \beta';\ \gamma;\ u,\ v)=\sum_0^\infty{}_n \frac{(\alpha,\ n)}{(\gamma,\ n)}\frac{u^n}{n!}\,{}_2F_1(\alpha+n,\ \beta';\ \gamma+n;\ v),$$

si ha con il precedente procedimento ($\alpha>-2$)

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{(\beta,\ n)}{\left(\frac{\alpha}{2}+1,\ n\right)} t^n L_n^{(\alpha+n)}(x) = \tag{4}$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{1-4t}}{2}\right)^{-2\beta}\Phi_1\left[\beta;\ \beta-\frac{\alpha}{2};\ \frac{\alpha}{2}+1;\ \frac{-4xt}{(1+\sqrt{1-4t})^2},\ \left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}}\right)^2\right].$$

Per $\beta=\frac{\alpha}{2}+1$, o facendo $t=\frac{t}{\beta}$ con $\beta\to\infty$, si riottengono i due precedenti sviluppi.

Per $\beta=\frac{\alpha}{2}$ si ha

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{\alpha}{\alpha+2n}t^n L_n^{(\alpha+n)}(x)=\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^\alpha {}_1F_1\left[\frac{\alpha}{2};\ \frac{\alpha}{2}+1;\ \frac{-4xt}{(1+\sqrt{1-4t})^2}\right]. \tag{4'}$$

6. In questa seconda parte del lavoro, sfruttando alcuni precedenti risultati, trovo le generatrici di altre classi di polinomi, con gli sviluppi (5), (6), (7). I primi due sono stati segnalati — senza dimostrazione — da ANGELESCO [6].

[6] A. ANGELESCO, *Sur des polynomes qui se rattachent à ceux de M. Appell*, « Comptes Rendus Acad. Sci. Paris » 180 (1925) p. 489.

a) Siano $A_n(x)$ e $B_n(x)$ due polinomi di grado n legati dalla relazione

$$e^x A_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[e^x B_n(x)].$$

Se $B_n(x)$ è della classe di APPELL $[B'_n(x) = nB_{n-1}(x)]$, posto

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} B_n(x) = \varphi(t) e^{tx},$$

vale

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} A_n(x) = \frac{1}{1-t}\varphi\left(\frac{t}{1-t}\right) e^{\frac{tx}{1-t}}. \tag{5}$$

Questo risultato formale, a parte le considerazioni che stiamo svolgendo, si può ottenere con il calcolo delle differenze finite. Si ha

$$\Delta^m \frac{A_0(x)}{0!} = (-1)^m \sum_0^m {}_n (-1)^n \binom{m}{n} \frac{A_n(x)}{n!}$$

$$= (-1)^m \sum_0^m {}_n \left[\sum_n^m {}_s (-1)^s \binom{m}{s}\binom{s}{n}\right] \frac{B_n(x)}{n!}.$$

L'espressione dentro parentesi quadre è uguale *a* o per $n \neq m$ e *a* $(-1)^m$ per $n = m$.

Pertanto

$$\Delta^m \frac{A_0(x)}{0!} = \frac{B_m(x)}{m!}.$$

Ciò premesso, con una trasformazione di EULERO [7] segue

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} A_n(x) = \sum_0^\infty {}_r \Delta^r \frac{A_0(x)}{0!} \cdot \frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}$$

$$= \frac{1}{1-t} \sum_0^\infty {}_r \left(\frac{t}{1-t}\right)^r \frac{B_r(x)}{r!} = \frac{1}{1-t}\varphi\left(\frac{t}{1-t}\right) e^{\frac{tx}{1-t}}.$$

Dimostriamo ora lo stesso risultato esprimendo i polinomi $A_n(x)$ con quelli di LAGUERRE. Posto

$$B_n(x) = \sum_0^n {}_r \binom{n}{r} b_r . x^{n-r}$$

[7] L. TOSCANO, *Una trasformazione di Pincherle e somma di alcune serie numeriche*, « Anais da Faculdade de Ciências do Porto », 22 (1936).

si ha

$$A_n(x) = n!\sum_{0}^{n}{}_r \binom{n}{r} b_r x^{-r} L_n^{(-r)}(-x) = n!\sum_{0}^{n}{}_r \frac{b_r}{r!} L_{n-r}^{(r)}(-x).$$

Introdotto l'operatore θ con la posizione $\theta b_r = b_{r+1}$ si ha ancora

$$A_n(x) = n!\left[\sum_{0}^{n}{}_r \frac{\theta^r}{r!} L_{n-r}^{(r)}(-x)\right] b_0 = n![L_n(-x-\theta)]b_0.$$

Allora

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n!} A_n(x) = \left[\sum_{0}^{\infty}{}_n t^n L_n(-x-\theta)\right] b_0$$

$$= \frac{1}{1-t} e^{\frac{tx}{1-t}} \cdot e^{\frac{t\theta}{1-t}} b_0 = \frac{1}{1-t} \varphi\left(\frac{t}{1-t}\right) e^{\frac{tx}{1-t}}$$

b) Fermo restando il legame tra $A_n(x)$ e $B_n(x)$, da cui inversamente

$$B_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\nu} \nu^{n-1} A_n(x-\nu) d\nu,$$

supponiamo che siano di Appell i polinomi $A_n(x)$.

Posto

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n!} A_n(x) = \varphi(t) e^{tx}$$

vale

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n!} B_n(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4t}}\right) \varphi\left(\frac{2t}{1+\sqrt{1+4t}}\right) e^{\frac{x}{2}(-1+\sqrt{1+4t})}. \tag{6}$$

Sia

$$A_n(x) = \sum_{0}^{n}{}_r \binom{n}{r} a_r x^{n-r}.$$

Si ha

$$B_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{0}^{n}{}_r \binom{n}{r} a_r \int_0^\infty e^{-\nu} \nu^{n-1} (x-\nu)^{n-r} d\nu = n! \sum_{0}^{n}{}_r \frac{a_r}{r!} L_{n-r}^{(-2n+r)}(-x).$$

Successivamente

$$B_n(x) = n!\left[\sum_{0}^{n}{}_r \frac{\theta^r}{r!} L_{n-r}^{(-2n+r)}(-x)\right] a_0 = n![L_n^{(-2n)}(-x-\theta)]a_0.$$

Allora

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{n!} B_n(x) = \left[\sum_0^\infty{}_n t^n L_n^{(-2n)}(-x-\theta)\right] a_0$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4t}}\right) e^{\frac{x}{2}(-1+\sqrt{1+4t})} \left[e^{(-1+\sqrt{1+4t})\frac{\theta}{2}}\right] a_0$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4t}}\right) \varphi\left(\frac{2t}{1+\sqrt{1+4t}}\right) e^{\frac{x}{2}(-1+\sqrt{1+4t})}.$$

c) Siano infine i due polinomi $A_n(x)$ e $B_n(x)$ legati dalla relazione

$$e^x A_n(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} [e^x B_n(x)]$$

e $B_n(x)$ sia della classe di APPELL.

Posto

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{n!} B_n(x) = \varphi(t) e^{tx}$$

vale

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{n!} A_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \varphi\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}}\right) e^{x\frac{1-\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}}}. \tag{7}$$

Per l'espressione di $A_n(x)$ in funzione dei polinomi di LAGUERRE si ha

$$A_n(x) = (2n)! \sum_0^n{}_r \binom{n}{r} b_r x^{-n-r} L_{2n}^{(-n-r)}(-x) = n! \sum_0^n{}_r \frac{b_r}{r!} L_{n-r}^{(n+r)}(-x)$$

$$= n! \left[\sum_0^n{}_r \frac{\theta^r}{r!} L_{n-r}^{(n+r)}(-x)\right] b_0 = n! [L_n^{(n)}(-x-\theta)] b_0.$$

Allora

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{n!} A_n(x) = \left[\sum_0^\infty{}_n t^n L_n^{(n)}(-x-\theta)\right] b_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4t}} e^{x\frac{1-\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}}} \left[e^{\frac{1-\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}}\theta}\right] b_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \varphi\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}}\right) e^{x\frac{1-\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}}}.$$