Bollettino
Unione Matematica Italiana

Wilhelm Blaschke

Connessioni fra varietà di C. Segre e la geometria dei tessuti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 259–261.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_259_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Connessioni fra varietà di C. Segre e la geometria dei tessuti.

Nota di WILHELM BLASCHKE (ad Amburgo).

Sunto. - *Si considerano i tessuti esagonali di coniche sulle intersezioni d'una* V_3 *di* SEGRE *con un iperpiano.*

Nello spazio proiettivo S_7 sia V_3 una varietà di C. SEGRE, la quale può considerarsi come prodotto di tre rette $\mathfrak{J}$, cioè rappresentabile mediante parametri t_1, t_2, t_3 e le coordinate omogenee

(5) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loco citato § 9; B. FINZI e M. PASTORI, loco citato. La (24) coincide con la (29) del cap. IX dell'ultima opera citata.

(6) H. YUKAWA, « Pro. Phys.-Math. Soc. of Japan », 20, 1938; A. PROCA, « Journ. de Phys. Rad. », 7, 1936.

(7) B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », s. VIII, v. XII, p. 378-382 e p. 477-480.

x_k nel modo seguente:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = t_1, \quad x_2 = t_2, \quad x_3 = t_3, \quad x_4 = t_2 t_3, \quad x_5 = t_3 t_1, \tag{1}$$
$$x_6 = t_1 t_2, \quad x_7 = t_1 t_2 t_3.$$

Questa V_3 contiene tre schiere di quadriche $Q(t_k)$, tali che su ognuna di esse uno dei parametri t_k si mantiene fisso.

Ogni iperpiano S_6 dello spazio S_7:

$$\sum_0^7 a_k x_h = 0, \tag{2}$$

che non contiene una delle nostre quadriche Q, taglia la V_3 in una V_2, che porta tre schiere $t_k = \text{cost.}$ di coniche, intersezioni dell'iperpiano S_6 colle quadriche Q.

Queste coniche $C(t_k)$ sulla V_1 formano un « tessuto esagonale », cioè i parametri t_k si possono sostituire

$$t_1 = t_1(u_1), \quad t_2 = t_2(u_2), \quad t_3 = t_3(u_3) \tag{3}$$

in tal guisa, che sulla V_2 diventi identicamente

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0. \tag{4}$$

Per la dimostrazione basta per esempio osservare, che la relazione trilineare (2), ponendo

$$F(t_1, t_2, t_3) = \sum_0^7 a_k x_k \tag{5}$$

soddisfa per tutti i valori delle costanti a_k l'equazione differenziale di terz'ordine

$$F_1^3 F_2 F_3 (F_3 F_{223} - F_2 F_{233}) + F_1^3 E_{23} (F_2^2 F_{33} - F_3^2 F_{22}) + \ldots = 0. \tag{6}$$

I punti indicano permutazione circolare di 1, 2, 3 e gli indici significano derivate parziali, per esempio

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial t_1}, \quad F_{223} = \frac{\partial^3 F}{\partial t_2 \partial t_2 \partial t_3}. \tag{7}$$

In ogni campo della superficie V_2 con tutte le derivate prime $F_j \neq 0$ la condizione (6) caratterizza i tessuti esagonali, come si dimostra senz'altro. Nel nostro caso (5) tutte le derivate seconde F_{kk} sono nulle e ne segue, che la (6) è soddisfatta.

Una superficie cubica C_2 dello spazio S_3 si può considerare in vari modi come proiezione di una superficie V_2 considerata nello spazio S_6. La C_2 porta perciò diversi tessuti esagonali di coniche, fatto osservato da W. BURAU, 1936 [1]. Prendiamo nello spazio S_3

[1] W. BURAU, « Hamburg Abhandlungen », 11 (1936), p. 381-386.

tre fasci di piani con assi sghembi e con una relazione trilineare (1), (2) fra parametri proiettivi t_k dei fasci. Essi generano una superficie cubica C_2, che porta il tessuto esagonale delle coniche $t_k = \text{cost.}$

Tali relazioni fra varietà di C. SEGRE [2] e la geometria dei tessuti [3] s'estendono facilmente ad altri casi più complicati. Ma la questione meno ovvia sarebbe la caratterizzazione infinitesimale delle varietà di SEGRE mediante tali proprietà.