Bollettino Unione Matematica Italiana

Cataldo Agostinelli

Sopra due casi notevoli di integrabilità delle equazioni della propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico circolare con dielettrico eterogeneo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 267–272.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sopra due casi notevoli di integrabilità delle equazioni della propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico circolare con dielettrico eterogeneo.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino).

Sunto. - *Si assegnano rispettivamente, mediante funzioni di* BESSEL *e mediante funzioni circolari, due tipi di soluzioni, particolarmente notevoli, delle equazioni della propagazione di onde elettromagnetiche guidate entro un tubo cilindrico circolare, con pareti metalliche perfettamente conduttrici, nelle ipotesi che il tubo sia ripieno di dielettrico eterogeneo, variabile con la distanza dall'asse con una determinata legge parabolica, che il campo sia armonico rispetto al tempo e che si propaghi nella direzione positiva dell'asse del tubo con velocità di fase uguale a quella critica.*

1. Con riferimento al problema della propagazione di onde elettromagnetiche guidate entro un tubo cilindrico con pareti metalliche perfettamente conduttrici, ripieno di dielettrico eterogeneo, ma identico su ogni parallela alle generatrici del tubo, supponiamo che la sezione retta del tubo sia limitata da una linea chiusa appartenente a una famiglia di linee isoterme $q_1(x, y) = \text{cost.}$, e indichiamo con $q_2(x, y) = \text{cost.}$ le linee isoterme che tagliano ortogonalmente le precedenti.

Riferendo il campo elettromagnetico entro il tubo a questa doppia famiglia di linee ortogonali e isoterme e a un asse z parallelo alle generatrici del tubo, le equazioni di MAXWELL che reggono il fenomeno risultano [1]

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial H_2}{\partial z} = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_1}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial H_1}{\partial z} - \dfrac{\partial H_3}{\partial q_1} = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_2}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{1}{Q^2}\left(\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_3}{\partial t}, \end{cases} \qquad (1')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial E_2}{\partial z} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_1}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial E_1}{\partial z} - \dfrac{\partial E_3}{\partial q_1} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_2}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{1}{Q^2}\left(\dfrac{\partial E_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial E_1}{\partial q_2}\right) = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_3}{\partial t}, \end{cases}$$

ove E_1, E_2, E_3; H_1, H_2, H_3 sono rispettivamente le componenti covarianti dei vettori $\vec{E}$, $\vec{H}$ del campo elettrico e del campo magnetico secondo il sistema di coordinate (q_1, q_2, z), ed è

$$\frac{1}{Q^2} = (\operatorname{grad} q_1)^2 = (\operatorname{grad} q_2)^2; \quad \Delta_2 q_1 = \Delta_2 q_2 = 0.$$

[1] Vedi C. AGOSTINELLI, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo conduttore riempito di dielettrico eterogeneo*, « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », vol. 85, 1950-51.

La costante dielettrica ε è supposta una funzione continua di q_1 e q_2, mentre la permeabilità magnetica μ è costante.

Al contorno, ove il campo elettrico è normale alla parete del tubo, devono essere verificate le condizioni

$$E_2 = 0, \; E_3 = 0, \quad \text{per } q_1 = q_1^{(0)}$$

essendo $q_1 = q_1^{(0)}$ l'equazione della linea che limita la sezione del tubo.

Supponendo ancora che il campo elettromagnetico sia armonico rispetto al tempo, di frequenza $\nu = \frac{2\pi}{\omega}$, e che si propaghi nella direzione positiva dell'asse z con velocità di fase V costante, che cioè i vettori $\vec{E}$, $\vec{H}$ del campo siano della forma

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(q_1, q_2)e^{i\frac{\omega}{V}(Vt-z)}, \quad \vec{H} = \vec{\mathcal{H}}(q_1, q_2)e^{i\frac{\omega}{V}(Vt-z)},$$

indicando rispettivamente con $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$; $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ le componenti covarianti dei vettori $\mathcal{E}(q_1, q_2)$, $\mathcal{H}(q_1, q_2)$, e con $\beta = \frac{\omega}{V}$ la *costante di fase,* le equazioni (1) e (1'), e le relative condizioni al contorno, diventano

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_2} + i\beta\mathcal{H}_2 = \dfrac{i\omega}{c}\varepsilon\mathcal{E}_1 \\[2ex] -i\beta\mathcal{H}_1 - \dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_1} = \dfrac{i\omega}{c}\varepsilon\mathcal{E}_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q_2} = \dfrac{i\omega}{c}\varepsilon Q^2\mathcal{E}_3, \end{cases} \qquad (2') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial q_2} + i\beta\mathcal{E}_2 = -i\dfrac{\mu\omega}{c}\mathcal{H}_1 \\[2ex] i\beta\mathcal{E}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial q_1} = i\dfrac{\mu\omega}{c}\mathcal{H}_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_2} = -i\dfrac{\mu\omega}{c}Q^2\mathcal{H}_3, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 = 0, \; \mathcal{E}_3 = 0, \qquad \text{per } q_1 = q_1^{(0)}.$$

2. Particolare importanza hanno, come si sa, le onde con campo magnetico trasversale e quelle con campo elettrico trasversale, dette rispettivamente onde di *tipo elettrico* e di *tipo magnetico.*

Nel primo caso è nulla la componente assiale $\mathcal{H}_3$ del vettore $\vec{\mathcal{H}}$ e le equazioni (2) e (2') si riducono alle seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} \beta\mathcal{H}_2 = \dfrac{\omega}{c}\varepsilon\mathcal{E}_1 \\[2ex] -\beta\mathcal{H}_1 = \dfrac{\omega}{c}\varepsilon\mathcal{E}_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q_2} = i\dfrac{\omega}{c}\varepsilon Q^2\mathcal{E}_3, \end{cases} \qquad (3') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial q_2} + i\beta\mathcal{E}_2 = -i\dfrac{\mu\omega}{c}\mathcal{H}_1 \\[2ex] i\beta\mathcal{E}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial q_1} = i\dfrac{\mu\omega}{c}\mathcal{H}_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_2} = 0, \end{cases}$$

dalle quali si deduce che la componente assiale $\mathcal{E}_3$ del campo elettrico deve verificare le equazioni

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial q_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}_3}{\partial q_2}-\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial q_2}\dfrac{\partial\mathcal{E}_3}{\partial q_1}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\dfrac{\partial\mathcal{E}_3}{\partial q_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial q_2}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\dfrac{\partial\mathcal{E}_3}{\partial q_2}\right)+\dfrac{\omega^2\mu}{c^2}\varepsilon Q^2\mathcal{E}_3=0, \end{cases}$$

ove si è posto

$$(5)\qquad \lambda=\varepsilon-\frac{c^2\beta^2}{\mu\omega^2}=\varepsilon-\frac{c^2}{\mu V^2},$$

essendo λ una quantità positiva che può annullarsi soltanto quando la velocità di fase V assume il valore critico $V_c=\dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}}$, essendo ε_1 il valore minimo di ε entro la sezione del tubo ([2]).

La prima delle (4) mostra che $\mathcal{E}_3$ sarà funzione di ε; in questa ipotesi essa risulta identicamente soddisfatta e la seconda diventa

$$(6)\qquad \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{d\mathcal{E}_3}{d\varepsilon}\right)\Delta_1\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{d\mathcal{E}_3}{d\varepsilon}\Delta_2\varepsilon+\frac{\omega^2\mu}{c^2}\varepsilon\mathcal{E}_3=0,$$

ove è

$$\Delta_1\varepsilon=(\mathrm{grad}\,\varepsilon)^2=\frac{1}{Q^2}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial q_2}\right)^2\right],$$

$$\Delta_2\varepsilon=\mathrm{div\,grad}\,\varepsilon=\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial q_2^2}\right).$$

Determinata $\mathcal{E}_3$ con la condizione che si annulli al contorno dalle prime due delle (3) e dalle prime due delle (3′) si ricavano subito le altre componenti del campo.

Nel caso in cui alla velocità di fase V si assegna il valore critico $c/\sqrt{\mu\varepsilon_1}$, risulta $\lambda=\varepsilon-\varepsilon_1$, e l'equazione (6) diventa

$$(7)\qquad \frac{d^2\mathcal{E}_3}{d\varepsilon^2}+\left[\frac{\Delta_2\varepsilon}{\Delta_1\varepsilon}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon(\varepsilon-\varepsilon_1)}\right]\frac{d\mathcal{E}_3}{d\varepsilon}+\beta^2\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\Delta_1\varepsilon}\mathcal{E}_3=0,$$

che presenta delle singolarità nel punto $\varepsilon=\varepsilon_1$, nei punti di stazionarietà di ε, ove si annulla $\Delta_1\varepsilon$ e negli eventuali punti singolari di $\Delta_2\varepsilon$.

Un caso particolarmente notevole in cui la (7) si integra mediante funzioni note è quello di un tubo a sezione circolare di raggio a e la costante dielettrica ε varia con la seguente legge parabolica

$$(8)\qquad \varepsilon=\varepsilon_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\frac{r^2}{a^2}$$

([2]) Vedi: C. AGOSTINELLI, loco citato.

Idem, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche guidate entro tubi cilindrici*, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino », (Conferenza tenuta il 27 maggio 1952), vol. 11°, a. 1951-52.

ove r è la distanza del punto dall'asse del tubo, ε_1 il minimo di ε in corrispondenza dell'asse ed ε_2 il massimo di ε al contorno.

In questo caso risulta

$$\Delta_1\varepsilon = \frac{4(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a^2}(\varepsilon - \varepsilon_1) \quad , \quad \Delta_2\varepsilon = \frac{4(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a^2} = \text{cost.}$$

e l'equazione (7) diventa

$$\frac{d^2\mathcal{E}_3}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\mathcal{E}_3}{d\varepsilon} + \beta^2 \frac{a^2}{4\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}\mathcal{E}_3 = 0,$$

che è l'equazione differenziale delle funzioni di BESSEL di ordine zero e nella quale è scomparsa la singolarità per $\varepsilon = \varepsilon_1$. Essa ammette gli integrali

$$(9) \qquad \mathcal{E}'_3 = C' J_0\left(\frac{\beta a \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}\right), \quad \mathcal{E}_3'' = C'' Y_0\left(\frac{\beta a \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}\right),$$

ove J_0 ed Y_0 sono le funzioni di BESSEL di ordine zero, di 1^a e di 2^a specie, e C', C'' sono costanti arbitrarie. Detti x_k gli zeri positivi della prima, y_k gli zeri positivi della seconda, in ordine crescente, poichè sul contorno, cioè per $r = a$, ovvero per $\varepsilon = \varepsilon_2$, deve essere $\mathcal{E}_3 = 0$, si ricavano rispettivamente per β i seguenti autovalori

$$\beta'_k = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}{a\varepsilon_2}x_k \quad , \quad \beta''_k = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}{a\varepsilon_2}y_k, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

e quindi le frequenze

$$\begin{matrix}\nu'_k \\ \nu''_k\end{matrix} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon_1}} \cdot \begin{Bmatrix}\beta'_k \\ \beta''_k\end{Bmatrix} = \frac{c}{\pi a\sqrt{\mu\varepsilon_2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \begin{Bmatrix}x_k \\ y_k\end{Bmatrix}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ricordando che nel caso in esame è $\dfrac{c^2\beta^2}{\mu\omega^2} = \dfrac{c^2}{\mu V^2} = \varepsilon_1$, le equazioni (3) e (3'), ove è ora $q_1 = \log r$, $q_2 = \theta$, $Q^2 = r^2$, porgono, per le altre componenti del campo, i valori:

$$\mathcal{E}_2 = 0, \quad \mathcal{H}_1 = 0$$

$$\mathcal{H}_2 = -i\frac{c}{\mu\omega}\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1} r\frac{d\mathcal{E}_3}{dr} = -2i\frac{c}{\mu\omega}\varepsilon\frac{d\mathcal{E}_3}{d\varepsilon} = -\frac{2i}{\beta}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\beta}}\,\varepsilon\frac{d\mathcal{E}_3}{d\varepsilon},$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{c\beta}{\omega\varepsilon}\mathcal{H}_2 = -2i\frac{\varepsilon_1}{\beta}\frac{d\mathcal{E}_3}{d\varepsilon}.$$

Vi sono dunque due successioni indefinite di onde di tipo elettrico che si possono propagare con velocità di fase uguale a quella critica in un tubo cilindrico circolare con dielettrico variabile con legge parabolica definita dalla (8).

3. Nel caso di onde di tipo magnetico è nulla la componente $\mathcal{E}_3$ del vettore $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ e le equazioni (2) e (2') diventano:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_2} + i\beta\mathcal{H}_2 = \dfrac{i\omega}{c}\varepsilon\mathcal{E}_1 \\ -i\beta\mathcal{H}_1 - \dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_1} = \dfrac{i\omega}{c}\varepsilon\mathcal{E}_2 \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_2} = 0, \end{cases} \qquad (10')\quad \begin{cases} \beta\mathcal{E}_2 = -\dfrac{\mu\omega}{c}\mathcal{H}_1 \\ \beta\mathcal{E}_1 = \dfrac{\mu\omega}{c}\mathcal{H}_2 \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_2} = -i\dfrac{\mu\omega}{c}Q^2\mathcal{H}_3 . \end{cases}$$

Da queste si deduce analogamente che la componente assiale $\mathcal{H}_3$ del vettore $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ deve soddisfare le equazioni

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial q_1}\dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial q_2}\dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_1} = 0. \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial q_2}\left(\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial q_2}\right) + \dfrac{\mu\omega^2}{c^2}Q^2\mathcal{H}_3 = 0. \end{cases}$$

Anche $\mathcal{H}_3$ dovrà essere dunque funzione di ε e in questa ipotesi la prima delle (11) è identicamente soddisfatta, mentre la seconda si trasforma nella seguente

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d\mathcal{H}_3}{d\varepsilon}\right)\Delta_1\varepsilon + \frac{1}{\lambda}\frac{d\mathcal{H}_3}{d\varepsilon}\cdot\Delta_2\varepsilon + \frac{\omega^2\mu}{c^2}\mathcal{H}_3 = 0.$$

Nel caso di onde elettromagnetiche che si propagono con velocità di fase V uguale a quella critica $c/\sqrt{\mu\varepsilon_1}$, quest'ultima equazione diventa

$$\frac{d^2\mathcal{H}_3}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{\Delta_2\varepsilon}{\Delta_1\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_1}\right)\frac{d\mathcal{H}_3}{d\varepsilon} + \beta^2\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_1\Delta_1\varepsilon}\mathcal{H}_3 = 0.$$

Se si tratta di un tubo cilindrico circolare di raggio a, in cui il dielettrico vari ancora con la legge parabolica (8), l'equazione precedente si riduce alla seguente

$$\frac{d^2\mathcal{H}_3}{d\varepsilon^2} + \beta^2\frac{a^2}{4\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}\mathcal{H}_3 = 0,$$

che ammette gli integrali

$$(12)\qquad \mathcal{H}'_3 = C_1\cos\left(\frac{\beta a}{2\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}\varepsilon\right), \quad \mathcal{H}_3'' = C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\beta a}{2\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}\varepsilon\right),$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

Al contorno deve essere $\mathcal{E}_2 = 0$, e quindi, per la seconda delle

(10) e la prima delle (10'), sarà $\frac{d\mathcal{H}_3}{dq_1} = 0$, cioè $\frac{d\mathcal{H}_3}{dr} = 0$, per $r = a$, ovvero $\frac{d\mathcal{H}_3}{d\varepsilon} = 0$, per $\varepsilon = \varepsilon_2$.

Si deducono in corrispondenza dalle (12) i seguenti autovalori per il parametro β

$$\beta'_k = \frac{2k\pi}{a\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}\,, \qquad \beta''_k = \frac{(2k-1)\pi}{a\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}\,, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

e quindi le frequenze

$$\nu'_k = \frac{kc}{a\sqrt{\mu\varepsilon_2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,, \qquad \nu''_k = \frac{(2k-1)c}{2a\sqrt{\mu\varepsilon_2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Per le altre componenti del campo dalle (10) e (10') si ricavano facilmente i valori

$$\mathcal{H}_2 = 0, \qquad \mathcal{E}_1 = 0,$$

$$\mathcal{H}_1 = -2i\frac{\varepsilon_1}{\beta}\frac{d\mathcal{H}_3}{d\varepsilon}, \qquad \mathcal{E}_2 = -\frac{\mu\omega}{c\beta}\mathcal{H}_1 = 2i\frac{\sqrt{\mu\varepsilon_1}}{\beta}\frac{d\mathcal{H}_3}{d\varepsilon}.$$

Dunque, in un tubo cilindrico a sezione circolare, il cui dielettrico varia con la legge parabolica (8), si possono propagare ancora infinite onde di tipo magnetico con velocità di fase uguale a quella critica.