BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI GATTESCHI

Limitazione dell'errore nella formula di Hilb e una nuova formula per la valutazione asintotica degli zeri dei polinomi di Legendre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 272–281.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_272_0>

Limitazione dell'errore nella formula di Hilb e una nuova formula per la valutazione asintotica degli zeri dei polinomi di Legendre.

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Bari).

Sunto. - *Si precisa l'errore nella formula di* HILB *per la valutazione asintotica dei polinomi di* LEGENDRE. *Servendosi di tale formula si stabilisce una limitazione per gli zeri degli stessi polinomi.*

1. Per la valutazione del polinomio $P_n(\cos \vartheta)$ di LEGENDRE sussiste la seguente formula asintotica di HILB [1]

$$P_n(\cos \vartheta) = \left(\frac{\vartheta}{\operatorname{sen} \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta \right\} + \sigma, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon,$$

[1] E. HILB, *Ueber die Laplacesche Reihe*, « Math. Zeitsch. », vol. 5 (1919), pp. 17-25; vol. 8 (1920), pp. 79-90.

dove $J_0(x)$ rappresenta la funzione di BESSEL di prima specie e di ordine zero, ed è inoltre

$$\begin{aligned} \sigma &= \vartheta^{\frac{1}{2}} O(n^{-\frac{3}{2}}) \qquad &\text{se} \qquad & cn^{-1} \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon, \\ \sigma &= \vartheta^2 O(1) \qquad &\text{se} \qquad & 0 < \vartheta \leq cn^{-1}, \end{aligned}$$

avendo indicato con c una costante positiva.

Vogliamo innanzitutto precisare l'errore che si commette quando si calcola $P_n(\cos\vartheta)$ facendo uso della formula di HILB, a tale scopo richiamiamo una relazione che si ottiene nello stabilire tale formula.

Applicando il metodo di LIOUVILLE-STEKLOFF ([2]) all'equazione differenziale di $P_n(\cos\vartheta)$ si ottiene la seguente equazione integrale del tipo di VOLTERRA:

$$(1) \quad \left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} + \frac{\pi}{8}\int_0^{\vartheta}\left[J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} - \right.$$

$$\left. - Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}\right] t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos t)\,dt,$$

dove $Y_0(x)$ denota la funzione di BESSEL di seconda specie e di ordine zero. Dalla (1) segue immediatamente la formula di HILB.

Noi dobbiamo qui maggiorare l'integrale

$$(2) \qquad I = \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos t)\,dt,$$

dove abbiamo posto

$$(3) \quad \Delta(t, \vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} - Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}.$$

Essendo $P_n(\cos(\pi - \vartheta)) = (-1)^n P_n(\cos\vartheta)$ basterà limitarci all'intervallo $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Allo scopo di ottenere migliori limitazioni ed in vista delle applicazioni che ne potremo fare per il calcolo degli zeri di $P_n(\cos\vartheta)$ distingueremo i due casi

$$0 < \vartheta \leq \pi/2n \qquad \text{e} \qquad \pi/2n < \vartheta \leq \pi/2.$$

([2]) Cfr. G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », XXIII, New York (1939), pp. 204-208.

2. *Caso* $0 < \vartheta \leq \pi/2n$. — In quanto segue supporremo $n > 3$, avvertiamo però che le formule stabilite continuano a sussistere anche per $n = 1, 2, 3$.

Com'è noto si ha

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\log\frac{x}{2} + \gamma\right\} J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2r}}{(r!)^2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right\},$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni, ed è facile verificare che, per

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n} < \frac{9\pi}{16},$$

la somma della serie a secondo membro della precedente relazione non supera in valore assoluto $(9\pi/32)^2$.

Tenuto inoltre presente che è

$$|J_0(x)| \leq 1,$$

si ha, per quanto sopra detto,

$$\left|\Delta(t, \vartheta)\right| \leq \frac{2}{\pi}\left|J_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}J_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right\}\log\frac{t}{\vartheta}\right| + 2\,\frac{2}{\pi}\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 \leq$$
$$\leq \frac{2}{\pi}\left\{\left|\log\frac{t}{\vartheta}\right| + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right\}.$$

Quando t varia nell'intervallo $(0, \pi/2n)$ si ha

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 < \frac{t^2}{\left(t - \frac{t^3}{6}\right)^2} - 1 = \left(1 + \frac{t^2}{6 - t^2}\right)^2 - 1 =$$
$$= t^2\left[\frac{2}{6 - t^2} + \frac{t^2}{(6 - t^2)^2}\right] \leq t^2\left[\frac{2}{6 - \pi^2/64} + \frac{\pi^2/64}{(6 - \pi^2/64)^2}\right] < 0{,}348,$$

ed essendo

$$|P_n(\cos\vartheta)| \leq 1,$$

otteniamo dalla (2)

$$|I| < \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\left\{\left|\log\frac{t}{\vartheta}\right| + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right\}0{,}348\, t\, dt <$$
$$< \frac{0{,}348}{\pi}\left[\frac{1}{2} + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right]\vartheta^2,$$

e quindi per la (1)

$$\left|\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos\vartheta) - J_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}\right| < \frac{0{,}348}{8}\left[\frac{1}{2} + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right]\vartheta^2,$$

cioè

$$\text{(A)} \qquad \left|\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) - J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}\right| < 0{,}09\,\vartheta^2, \qquad (0 < \vartheta \leq \pi/2n),$$

che è la prima relazione che ci eravamo proposti di stabilire.

3. *Caso* $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$. — Posto

$$I = I_1 + I_2,$$

con

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \Delta(t,\,\vartheta)t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos t)dt,$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\vartheta} \Delta(t,\,\vartheta)t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos t)dt,$$

e ricordando che è [3]

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} J_0(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + R(x)\right], \\ Y_0(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + R(x)\right], \end{aligned}$$

dove, in ambedue i casi, è

$$|\,R(x)\,| < \frac{1}{8\,|\,x\,|} + \frac{9}{8x^2},$$

si ha, tenuto conto della (4)

$$|\,I_1\,| < \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left\{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta}\right\}^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + \frac{9}{\left\{8\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{\left|\,Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}\right| + \left|\,J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}\right|\right\}t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}dt.$$

E poichè risulta, per $0 < t \leq \pi/2n$ e $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$,

$$\text{(6)} \qquad 1 + \frac{1}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} + \frac{9}{\left\{8\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}^2} < 1{,}137,$$

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 < 0{,}345t^2,$$

[3] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel functions*, Cambridge (1922), §§ 7-31, pp. 207-208.

otteniamo

$$| I_1 | < 0{,}396 \left\{ \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left[t \frac{2}{\pi} \left| \log\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{2} \right| + \gamma \left\{ \left| J_0 \left\{ \left(n+\frac{1}{2}\right)t \right\} \right| + \right. \right.$$

$$\left. + t \frac{\pi}{2}\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 \right] dt + 0{,}396 \left\{ \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t \left| J_0\left(n+\frac{1}{2}\right)t \right| dt,$$

da cui

$$| I_1 | < 0{,}396 \left\{ \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t \left| \log\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{\vartheta} \right| dt + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{2}{\pi}\gamma + \frac{2}{\pi}\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 + 1 \right\} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \right] =$$

$$= 0{,}396 \left\{ \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\pi}{8n^2}\left[1 - 2\log\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4n}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[2\gamma + \left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 + \pi\right]\frac{\pi}{8n^2} \right\}.$$

E poichè per $n > 3$ è

$$\frac{\pi}{4} < \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4n} < 1,$$

avremo

$$| I_1 | < 0{,}396 \left(\frac{2\pi}{n\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - 2\log\frac{\pi}{4} + 2\gamma + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 + \pi\right] \frac{1}{8n^2},$$

cioè

$$(7_1) \qquad | I_1 | < 0{,}911\, \vartheta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{2}}.$$

Nella maggiorazione di I_2 facciamo uso della seguente disuguaglianza [4]

$$(\operatorname{sen}\vartheta)^{\frac{1}{2}} \left| P_n(\cos\vartheta) \right| < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Si ha così, per le (5) e per la (6),

$$| I_2 | < 1{,}137 \left\{ \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\vartheta} 2 \left\{ \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)t} + \right.$$

[4] Loc. cit. [2], p. 160.

$$+\frac{1}{\left\{8\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}^2}\Bigg]\cdot t^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2-1\right\}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\,dt<$$

$$<(1{,}137)^2\frac{4}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(n\vartheta)^{-\frac{1}{2}}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\vartheta}t^{-2}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2-1\right\}dt,$$

ed essendo ora

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2-1<t^2\left[\frac{1}{6-\pi^2/4}+\frac{\pi^2/4}{(6-\pi^2/4)^2}\right]$$

otteniamo

$$|I_2|<\frac{4\cdot(1{,}137)^2(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\pi^2}n^{-\frac{3}{2}}\vartheta^{-\frac{1}{2}}\left(\vartheta-\frac{\pi}{2n}\right),$$

da cui

$$|I_2|<1{,}003\,\vartheta^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}. \tag{7_2}$$

Da quest'ultima e dalla (7_1) abbiamo

$$|I|\leq|I_1|+|I_2|<0{,}911\,\vartheta^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{5}{2}}+1{,}003\,\vartheta^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}},$$

e per la (1)

$$\left|\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos\vartheta)-J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}\right|<0{,}358\,\vartheta^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{5}{2}}+0{,}394\,\vartheta^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}, \tag{B}$$

$$\frac{\pi}{2n}<\vartheta\leq\frac{\pi}{2}.$$

Si verifica facilmente che la (A) e la (B) sussistono anche per $n=1,\ 2,\ 3$.

4. *Applicazione al calcolo degli zeri di* $\mathrm{P_n}(\cos\vartheta)$. — Per gli zeri $\vartheta_{n,r}$, $(r=1,\ 2,\dots,\ n)$, di $P_n(\cos\vartheta)$ valgono le classiche limitazioni di BRUNS

$$\frac{r-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi<\vartheta_{n,r}<\frac{r}{n+\frac{1}{2}}\pi.$$

Facendo invece intervenire gli zeri $j_{0,r}$ di $J_0(x)$ si ha [5]

$$\frac{j_{0,r-1}}{n+\frac{1}{2}}<\vartheta_{n,r}<\frac{j_{0,r}}{n+\frac{1}{2}},\qquad r=1,\ 2,\dots,\ n,\qquad j_{0,0}=0,$$

[5] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna, (1948), vol. I, pp. 201-203.

e poichè

$$j_{0,r} < r\pi,$$

si ha che nell' intervallo

$$(8) \qquad \frac{r-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi < \vartheta_{n,r} < \frac{j_{0,r}}{n+\frac{1}{2}}, \qquad r = 1, 2, \dots, n,$$

cade uno ed un solo zero di $P_n(\cos\vartheta)$.

In altro lavoro ([6]) abbiamo stabilito la seguente limitazione per l' r-esimo zero j_{0r} di $J_0(x)$

$$\left| j_{0,r} - r\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8(r\pi - \pi/4)} \right| < \frac{8{,}5r}{2^6(2r-1)^3(6r-5)},$$

da questa deduciamo che

$$(9) \qquad j_{0,r} < r\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6\pi} + \frac{8{,}5}{64}.$$

Detti $\vartheta^*_{n,r}$ gli zeri di $J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}$ si ha

$$\vartheta^*_{n,r} = \frac{j_{0,r}}{n+\frac{1}{2}}, \qquad r = 1, 2, \dots,$$

e posto

$$(10) \qquad \vartheta_{n,r} = \vartheta^*_{n,r} - \delta,$$

risulta

$$0 < \delta < \frac{j_{0,r} - \left(r-\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}},$$

e per la (9)

$$(11) \qquad 0 < \delta < \frac{\pi/4 + 0{,}186}{n+\frac{1}{2}}.$$

Si consideri ora la funzione

$$(12) \qquad f_n(\vartheta) = \left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\vartheta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} + \rho(n,\vartheta)$$

$$\frac{\pi}{2n} < \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

([6]) L. Gatteschi, *Valutazione dell' errore nella formula di Mc Mahon per gli zeri della* $J_n(x)$ *di Bessel nel caso* $0 \leq n \leq 1$, « Rivista di Mat. Univ. di Parma », 1 (1950), pp. 347-362.

dove per la (B) è

$$|\rho(n, \vartheta)| < 0{,}358\vartheta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{2}} + 0{,}394\vartheta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}. \tag{13}$$

Dalla (12) per la (10) avremo

$$J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\vartheta^*_{n,r}-\delta)\right\}+\rho(n, \vartheta_{n,r})=0, \qquad r=1.\ 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

cioè

$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta J_0'\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}\right\}+\rho(n, \vartheta_{n,r})=0$$

con

$$\vartheta^*_{n,r}-\delta \leq \bar{\vartheta} \leq \vartheta^*_{n,r},$$

da cui

$$\delta=\frac{|\rho(n, \vartheta_{n,r})|}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left|J_0'\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}\right\}\right|}.$$

Tenuto conto che è $J_0'(x) = -J_1(x)$ la precedente relazione potrà scriversi

$$\delta=\frac{|\rho(n, \vartheta_{n,r})|}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left|J_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}\right\}\right|}. \tag{14}$$

Essendo (7)

$$J_1(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)+R(x)\right],$$

dove

$$|R(x)| < \frac{3}{8|x|}+\frac{15}{(8x)^2}, \tag{15}$$

si ha per la (11)

$$\left|J_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}\right\}\right| > \left(\frac{2}{\pi j_{0,r}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left|\cos\left\{-\varepsilon\left(\frac{\pi}{4}+0{,}186\right)-\frac{3}{4}\pi\right\}\right|-|R|\right],$$

$$(0 \leq \varepsilon \leq 1),$$

da cui

$$\left|J_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}\right\}\right| > \left(\frac{2}{\pi j_{0,r}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-|R|\right].$$

Ma per la (15) è

$$|R| < \frac{3}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}}+\frac{15}{2\left\{8\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}\right\}^2} < \frac{3}{8\pi/2}+\frac{15}{2(8\pi/2)^2},$$

(7) Loc. cit. (3), pp. 207-208.

quindi

$$\left|J_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}\right\}\right| > \left(\frac{2}{\pi j_{0,r}}\right)^{\frac{1}{2}} 0{,}421. \tag{16}$$

Dalla (12) per la (8) otteniamo

$$|\rho(n, \vartheta_{n,r})| < 0{,}358\left(\frac{r-1/2}{n+1/2}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{2}} + 0{,}394\left(\frac{j_{0,r}}{n+1/2}\right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}} <$$

$$< 0{,}358\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(r\pi)^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{5}{2}} + 0{,}394(r\pi)^{\frac{1}{2}}n^{-2},$$

e perciò dalla (14) tenuto conto della (16) segue

$$\delta < \frac{0{,}358 n^{-4} 2^{\frac{1}{2}}(r\pi)^{-\frac{1}{2}} + 0{,}394(r\pi)^{\frac{1}{2}} n^{-4}}{(2/\pi)^{\frac{1}{2}} 0{,}421} (r\pi)^{\frac{1}{2}}$$

da cui

$$\delta < \frac{16+37r}{10n^4}.$$

Abbiamo così stabilito la seguente disuguaglianza per l'r–esimo zero $\vartheta_{n,r}$ di $P_n(\cos\vartheta)$

$$0 < \frac{j_{0,r}}{n+\frac{1}{2}} - \vartheta_{n,r} < \frac{16+37r}{16n^4}, \tag{17}$$

$$r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

In precedenti lavori ([8]) abbiamo considerato altre formule asintotiche per $\vartheta_{n,r}$. Tali formule risultavano però valide solo per $[(n+2)/6]+1 \leq r \leq [n/2]$; la (17) invece, oltre ad essere più generale, si dimostra particolarmente efficace per il calcolo dei primi zeri di $P_n(\cos\vartheta)$.

Applicandola per esempio al calcolo del primo zero $\vartheta_{10,1}$ di $P_{10}(\cos\vartheta)$ si trova

$$0{,}2285 < \vartheta_{10,1} < 0{,}2291,$$

([8]) L. Gatteschi, *Una formula asintotica per l'approssimazione degli zeri dei polinomi di Legendre*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 4 (1949). pp. 240-250.

L. Gatteschi, *Sull'approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici*, Ibidem, (3), 2 (1950), pp. 305-313.

quindi per il corrispondente zero $x_{10,1}$ di $P_{10}(x)$ si ha

$$0,9691 < x_{10,1} < 0,9741,$$

mentre il valore con quattro cifre decimali esatte dato dalla tavola di LOWAN-DAVIDS-LEVENSON (9) è $V_4 x_{10,1} = 0,9739$.