Bollettino Unione Matematica Italiana

Tristano Manacorda

Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di sistemi di equazioni differenziali lineari non omogenei.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 281–284.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_281_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di sistemi di equazioni differenziali lineari non omogenei.

Nota di TRISTANO MANACORDA (a Firenze).

Sunto. - *Sotto opportune ipotesi si dimostra che nel sistema di equazioni differenziali scritto in forma vettoriale* $x' = A(t)x + \eta(t)$ *tutti gli integrali tendono asintoticamente a quelli del sistema* $x' = \eta(t)$.

1. Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$x_h' = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}(t)x_k + \eta_h(t), \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

che si scrive in forma vettoriale

$$x'(t) = A(t)x(t) + \eta(t), \tag{1'}$$

in cui $x(t)$ è il vettore di componenti x_h, $A(t) = \| a_{hk}(t) \|$, $\eta(t)$ il vettore di componenti $\eta_h(t)$. Supporremo $x(t)$ ed η fnnzioni continue di t per $t_0 \leq t < \infty$. Se poniamo

$$x^1(t) = \int^t \eta(t)dt, \tag{2}$$

e

$$x(t) = x^1(t) + u(t), \tag{3}$$

la (1') diviene:

$$u'(t) = A(t)\, u(t) + \mu(t), \tag{4}$$

con

$$\mu(t) = A(t)\, x^1(t). \tag{5}$$

(9) A. N. LOWAN, N. DAVIDS, A. LEVENSON, *Table of the zeros of Legendre Polynomials of order* 1-16 *and the weight coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature formula*, « Bull. Amer. Math. Soc. »,48 (1942), pp. 738-743.

A. WINTNER ha provato [1] che se nel sistema omogeneo

$$u'(t) = A(t)u(t),$$

la matrice $A(t)$ soddisfa alle condizioni

$$(6)\quad \int^{\infty} a_{hk}dt = \text{convergente};\ \int^{\infty} dt \mid \int_t^{\infty} a_{hk}ds \mid < \infty;\ \overline{\lim_{t\to\infty}} \mid a_{hk} \mid < \infty,$$

scelto comunque un vettore costante c, esiste uno ed un solo integrale della (4′) tale che

$$(7)\qquad \lim_{t\to\infty} u(t) = c.$$

Generalizzando il procedimento di una nota precedente [2], proverò qui che se alle ipotesi (6) si aggiungono le ipotesi

$$(6')\qquad \int^{\infty} \mu_h dt = \text{convergente};\ \overline{\lim_{t\to\infty}} \mid \mu_h(t) \mid < \infty;$$

esiste un integrale particolare delle (4) che soddisfa alla condizione

$$(8)\qquad \lim_{t\to\infty} u^o(t) = 0.$$

Ne risulta quindi che per l'integrale generale della (4) si ha

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = c,$$

e quindi per quello della (1′):

$$(9)\qquad \lim_{t\to\infty} \mid x(t) - x^1(t) \mid = c.$$

2. Nelle ipotesi fatte hanno significato le matrici

$$(10)\qquad B(t) = \int_t^{\infty} A(s)ds;\ M(t) = \int_t^{\infty} \mu(s)ds.$$

Se indichiamo con $\| B(t) \|$ la norma della matrice B, cioè la somma dei valori assoluti degli elementi di B, si ha, in base alla

(1) A. WINTNER: *On linear asymptotic equilibria*, Amer. J. of Mathc. **71** (1949), pp. 853-858.

(2) T. MANACORDA: *Sul comportamento asintotico di una classe di equazioni differenziali lineari non omogenee*, Boll. U.M.I. (3), 6, (1951), pp 304-311.

seconda delle (6), che

$$b(t) = \int_t^\infty \| B(s) \| \, ds, \tag{11}$$

definisce una funzione positiva di t per $t_0 \leq t < \infty$, non crescente e che tende a zero per $t \to \infty$.

Ciò premesso si consideri l'equazione integrale

$$u(t) = - B(t)u(t) - \int_t^\infty B(s)A(s)u(s)ds - \int_t^\infty B(s)\mu(s)ds - M(t). \tag{12}$$

Vedremo col metodo delle approssimazioni successive che la (12) ammette una soluzione che soddisfa la (8). Poniamo a questo scopo

$$\begin{gathered} u_0 = 0, \; u_1 = - \int_t^\infty B(s)\mu(s)ds - M(t), \\ u_{n+1} = - B(t)u_n - \int_t^\infty B(s)A(s)u_n ds + u_1 . \end{gathered} \tag{13}$$

Si ha

$$\| u_1 \| = \| u_1 - u_0 \| \leq \int_t^\infty \| B(s) \| \| \mu(s) \| \, ds + \| M(t) \|,$$

e per le ipotesi (6') esiste una costante σ tale che $\| \mu \| \leq \sigma$ e si ottiene quindi

$$\| u_1 \| \leq \sigma \, b(t) + \| M(t) \| = \lambda(t), \tag{14$_1$}$$

con $\lambda(t)$ funzione positiva oon crescente di t che tende a zero per $t \to \infty$.

Si ha analogamente

$$\| u_{n+1} - u_n \| \leq \| B(t) \| \| u_n - u_{n-1} \| + \int_t^\infty \| A(s) \| \| B(s) \| \| u_n - u_{n-1} \| ds.$$

Ora, in base alle (6), esiste una costante a tale che $\| A(t) \| < a$, $t_0 \leq t < \infty$.

Si ottiene quindi

$$\| u_2 - u_1 \| \leq \lambda(t) \| B(t) \| + a\lambda(t) b(t) = \lambda(t) \{ \| B(t) \| + ab(t) \}. \tag{14$_2$}$$

Siccome $\lim\limits_{t \to \infty} \| B(t) \| = \lim\limits_{t \to \infty} b(t) = 0$, si può trovare un t_1 tale che per $t \geq t_1$ sia $\| B(t) \| + ab(t) < 1/2$, e quindi

$$(14_2) \qquad \| u_2 - u_1 \| < (1/2)\,\lambda(t).$$

Analogamente

$$(14_{n+1}) \qquad \| u_{n+1} - u_n \| < (1/2)^n\,\lambda(t).$$

Ne segue che la serie di funzioni $\Sigma \| u_{n+1} - u_n \|$, essendo minorante di una serie numerica convergente, è uniformemente convergente. Da ciò segue la uniforme convergenza della serie di vettori $\Sigma \{ u_{n+1} - u_n \}$ (3) e quindi anche della successione $\{ u_n(t) \}$, che converge pertanto ad una soluzione della (12). Detta $u(t)$ tale soluzione, in base alle (14) si ha

$$\| u(t) \| \leq 2\lambda(t),$$

e quindi

$$(15) \qquad \lim_{t \to \infty} \| u(t) \| = 0.$$

3. Rimane ancora da provare che ogni soluzione della (12) lo è anche del sistema (4). La (12) si può scrivere:

$$(16) \qquad u(t) + B(t)u(t) = -\int_t^\infty B(t)A(t)u(t)dt - \int_t^\infty B(s)\mu(s)ds - M(t),$$

e cioè, ponendo

$$C(t) = E + B(t),$$

con E matrice unità

$$(16') \qquad C(t)u(t) = -\int_t^\infty B(s)A(s)u(s)ds - \int_t^\infty B(s)\mu(s)ds - M(t).$$

Siccome $\lim B(t) = 0$, può supporsi che per $t \geq t_1$ sia $| C | \neq 0$, e quindi esiste C^{-1}. Inoltre, per le ipotesi fatte, esiste la derivata rispetto a t di C e di C^{-1}, e quindi anche di $u(t)$ (4). Ne segue che si può derivare la (16) termine a termine ottenendo

$$u' + Bu' - Au = \mu(t) + BAu + B\mu(t),$$

cioè

$$u' - Au - \mu(t) = -B\{ u' - Au - \mu(t) \},$$

od anche

$$C(t)\{ u' - Au - \mu(t) \} = 0,$$

e siccome $| C | \neq 0$, $u' - Au - \mu(t) = 0$, c.v.d.

La proposizione enunciata risulta quindi completamente provata.

(3) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Equazioni Differenziali nel campo reale*, I, 2ª ed. (Bologna, 1948), pag. 81.

(4) Cfr. WINTNER, loco cit., pag. 858.