Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Contributo alla geometria proiettiva differenziale dei 3-tessuti di curve piane.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 285–292.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_285_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Contributo alla geometria proiettiva differenziale dei 3-tessuti di curve piane.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna).

Sunto - *Si determina un sistema completo di invarianti proiettivi per un 3-tessuto di curve piane. Si mostra poi come possa esprimersi per mezzo degli invarianti la condizione analitica affinchè un 3-tessuto di curve sia formato dalle curve caratteristiche di una trasformazione.*

1. In una Conferenza tenuta al IV° Congresso della U.M.I. (1) il VILLA ha attirato l'attenzione su alcuni problemi in grande relativi alle trasformazioni puntuali fra piani. Fra essi ha particolare interesse il problema della *caratterizzazione geometrica* dei sistemi di curve caratteristiche di una trasformazione. In una Comunicazione (2) allo stesso Congresso ho indicato un procedimento che conduce a *condizioni analitiche* caratteristiche per i predetti sistemi; in quel lavoro ho condotto a termine soltanto il caso delle trasformazioni di 3ª specie, nel quale il sistema delle curve caratteristiche (in ciascun piano) è un sistema semplice ∞^1 di curve. Ma il caso che presenta maggior interesse è invece quello delle trasformazioni di 1ª specie, nel quale il sistema delle curve caratteristiche è un 3-tessuto (3) di curve. Nel presente lavoro considero il problema da un punto di vista che è da raccostare alla teoria delle reti piane, dovuta ad E. ČECH, come ora spiegherò. È noto come il ČECH consideri nella sua teoria quelle corrispondenze fra reti piane nelle quali vi è contatto analitico omografico del 2° ordine fra le curve delle reti uscenti da punti corrispondenti, corrispondenze che vengono chiamate *deformazioni proiettive* delle reti. È immediato che quelle corrispondenze sono tali che le curve delle reti sono per esse curve caratteristiche (4). Ebbene conside-

(1) M. VILLA, *Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali*, Atti IV° Congresso U. M. I., Messina - Taormina, 1951.

(2) L. MURACCHINI, *Trasformazioni puntuali e loro curve caratteristiche*, Atti IV° Congresso U. M. I., Messina - Taormina, 1951.

(3) Per la topologia ed altro dei 3-tessuti vedasi: W. BLASCHKE - G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Berlino, 1938.

(4) Il ČECH ha dimostrato che, data una rete, le sue deformazioni proiettive dipendono da 4 funzioni arbitrarie di una variabile. Ciò significa che una rete del 3-tessuto di curve caratteristiche di una trasformazione

rerò quì, dallo stesso punto di vista, 3-tessuti anzichè reti di curve e le corrispondenze fra 3-tessuti (che potremo chiamare *deformazioni proiettive dei 3-tessuti*) nelle quali vi sia contatto geometrico del 2° ordine fra le curve dei 3-tessuti uscenti da punti corrispondenti. È immediato che (5): in generale non vi sono per un 3-tessuto altre deformazioni proiettive che le omografie e che le eventuali deformazioni proiettive (non omografiche) di un 3-tessuto sono tutte e sole le trasformazioni per le quali le curve del 3-tessuto sono curve caratteristiche. Il problema della caratterizzazione dei 3-tessuti di curve caratteristiche delle trasformazioni così affrontato viene ad inquadrarsi in una teoria proiettiva differenziale dei 3-tessuti (6) analoga alla teoria delle superficie, dovuta a G. FUBINI ed E. CARTAN, ed a quella delle reti dovuta ad E. ČECH.

Nel presente lavoro determino anzitutto un sistema completo di invarianti proiettivi per un 3-tessuto generico. Ciò è stato fatto con metodi e vedute del tutto diverse da E. KOLLWITZ (7) ma ho ripreso la questione per poter mettere in relazione quegli invarianti con certi enti, recentemente introdotti da E. BOMPIANI (8), associati ad un 3-tessuto. Formo poi il sistema di equazioni di PFAFF da cui dipende il problema della deformazione proiettiva dei 3-tessuti. La discussione completa del predetto sistema porterebbe alla risoluzione del problema, almeno dal punto di vista analitico. Data la

si può sempre assegnare ad arbitrio. In modo analogo ed altrettanto semplice si può dimostrare che: *uno dei tre sistemi di curve caratteristiche si può assegnare ad arbitrio e la rete che insieme ad esso completa il 3-tessuto dipende da 1 funzione arbitraria di 2 variabili.* Vedasi: G. FUBINI - E. ČECH, *Introduction a la géométrie projective différentielle des surfaces*, Parigi, 1931.

(5) Perchè i 3-tessuti dipendono da 3 funzioni arbitrarie di 2 variabili, mentre le trasformazioni puntuali, ed i loro 3-tessuti caratteristici, da 2 funzioni di 2 variabili soltanto.

(6) Dal punto di vista topologico il 3-tessuto delle curve caratteristiche di una trasformazione non ha nessuna particolarità. Si dimostra infatti (con gli stessi metodi che servono per le proposizioni di (4)) che: *le trasformazioni puntuali il cui 3-tessuto di curve caratteristiche è topologicamente equivalente ad uno dato, esistono sempre e dipendono da una funzione arbitraria di 2 variabili.* Questa proposizione è stata dimostrata nel caso di 3-tessuti a configurazione esagonale da O. BORUWKA in Čas. pro Pest. Mat. Fis., (57) 1928, 183-185.

(7) E. KOLLWITZ, *Projective Invarianten von Kurvengeweben,* Mitteil. Math. Ges. Hamburg, (7) 1933, 132-147.

(8) E. BOMPIANI, *Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani,* Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci., (8) 6, 1949, 7-12.

complicazione dei calcoli occorrenti, quella discussione non viene però qui effettuata ([9]).

2. In un piano proiettivo π sia dato un 3-tessuto di curve nel modo seguente,

$$P_0 = P_0(u, v) \tag{1}$$

sia il punto che descrive in π le curve del 3-tessuto quando u e v variano legati dalla

$$\omega_1^3 - \omega_2^3 = 0, \tag{2}$$

dove ω_1, ω_2 sono due forme di Pfaff in u, v ([10]). Sia

$$[d\omega_1] = \rho_1[\omega_1\omega_2], \; [d\omega_2] = \rho_2[\omega_1\omega_2], \; \tau = \rho_2\omega_1 - \rho_1\omega_2 \tag{3}$$

sicchè

$$[d\omega_1] = [\tau\omega_1], \quad [d\omega_2] = [\tau\omega_2],$$

e sia infine

$$[d\tau] = \rho[\omega_1\omega_2]. \tag{4}$$

Consideriamo le tre tangenti in P_0 alle curve del 3-tessuto uscenti da quel punto ed un riferimento proiettivo avente un vertice in P_0 e gli altri due, P_1, P_2 scelti in modo tale che i punti $P_1 - \varepsilon^h P_2 (h = 0, 1, 2; \; \varepsilon^3 = 1)$ appartengono alle tre tangenti anzidette. Siano

$$dP_i = \omega_{0i}P_0 + \omega_{1i}P_1 + \omega_{2i}P_2 \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{5}$$

le solite formule di Frenet del riferimento; si ha come è noto

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}],$$

e si può supporre che sia

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0.$$

Per le ipotesi fatte sui punti P_1, P_2 dovrà aversi:

$$\omega_{01} = m\omega_1, \qquad \omega_{02} = m\omega_2 \qquad (m \neq 0) \tag{6}$$

([9]) Se si confronta il sistema a cui qui si perviene nel n. 4 con quello da cui dipende il problema della deformazione proiettiva della superficie (Cfr. E. Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces*, Ann. Ec. Normale Sup., (3) 37, 1920, 259-356, a pag. 288) ci si rende facilmente ragione di come, per quest'ultimo, la discussione richieda calcoli più semplici.

([10]) Per tutto ciò che si riferisce alla terminologia ed alle notazioni che adoperiamo, vedasi: J. Dubourdieu, *Questions topologiques de géométrie differentielle*, « Mémorial des Sciences Mathématiques, 78, Paris, 1936.

Queste ultime relazioni danno per differenziazione esterna

$$\left[\left(\frac{dm}{m} + \omega_{11} - \omega_{00} + \tau\right)\omega_{01}\right] + [\omega_{21}\omega_{02}] = 0$$

$$[\omega_{12}\omega_{01}] + \left[\left(\frac{dm}{m} + \omega_{22} - \omega_{00} + \tau\right)\omega_{02}\right] = 0$$

e pertanto si ha

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{dm}{m} + \omega_{11} - \omega_{00} + \tau &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_{21} &= \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \omega_{12} &= \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \\ \frac{dm}{m} + \omega_{22} - \omega_{00} + \tau &= \mu\omega_1 + \nu\omega_2 . \end{aligned}$$

Le (6) mostrano che si possono fissare i punti P_1, P_2 sulle rette che li congiungono a P_0 in modo da avere $m = 1$. Differenziando allora esternamente le equazioni a cui si riducono le (6) si ottengono relazioni che per brevità non trascrivo e dalle quali si vede subito che fissando opportunamente il punto unità $P_0 + P_1 + P_2$ del riferimento si può far sì che sia $\beta = \mu = 0$. I coefficienti che rimangono nelle (6) sono invarianti; porremo

$$\alpha = I_1 \quad , \quad \gamma = I_2 \quad , \quad \lambda = I_3 \quad , \quad \nu = I_4$$

Le (6) si sono ridotte alle

$$(7)\qquad \begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{00} &= I_1\omega_1 - \tau \\ \omega_{21} &= I_1\omega_2 \\ \omega_{12} &= I_3\omega_1 \\ \omega_{22} - \omega_{00} &= I_4\omega_2 - \tau \end{aligned}$$

e si ha inoltre

$$(8)\qquad \begin{aligned} \omega_{10} &= -(I_3I_4 + I_{31})\omega_1 + \left(I_2I_3 + \frac{2}{3}I_{12} + \frac{1}{3}I_{41} + \frac{1}{3}\rho\right)\omega_2 \\ \omega_{20} &= \left(I_2I_3 + \frac{2}{3}I_{41} + \frac{1}{3}I_{12} - \frac{1}{3}\rho\right)\omega_1 - (I_1I_2 + I_{21})\omega_2 \end{aligned}$$

avendo posto

$$(9)\qquad dI_i + \tau I_i = I_{i2}\omega_1 + I_{i2}\omega_2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Le equazioni (7), (8) mostrano che gli invarianti I_i e quelli che se ne deducono mediante l'operazione (9) costituiscono, insieme con le forme ω_1, ω_2, un sistema completo di invarianti proiettivi del 3-tessuto. I quattro invarianti I_i che sono legati dalle relazioni quadratiche esterne che derivano dalle (7), (8), sono gli *invarianti proiettivi fondamentali* del 3–tessuto.

3. Vogliamo ora fare alcune osservazioni sugli invarianti I_i. Anzitutto si osserverà che essi sono legati alle forme ω_1, ω_2 le quali *a priori* non hanno significato assoluto. Ciò non ha del resto importanza, ma, volendo, si potrebbero preventivamente *normalizzare* le forme ω_1, ω_2 in modo da renderle assolutamente invarianti di fronte al gruppo topologico dei cambiamenti di parametri u, v. Occorrerebbe allora distinguere il caso generale da quello dei 3–tessuti *a configurazione esagonale* ([11]).

Ma una osservazione più importante è la seguente. Se il 3–tessuto che si considera ammette un gruppo ∞^h di trasformazioni non–omografiche in sè, allora i suoi invarianti I_i, che sono invarianti proiettivi puri, sono definiti a meno di h costanti arbitrarie. Così, ad esempio, se si considera un 3-tessuto formato da tre fasci di rette a centri non allineati si trova senza difficoltà (Cfr. anche l'op. cit. in ([10]), pag. 23) che per esso è:

$$I_1 = I_4 = 0 \qquad , \qquad I_2 = I_3 = \alpha$$

ed α è dato da

$$d\alpha + \tau\alpha = 0$$

sicchè α dipende da una costante arbitraria; e ciò appunto perchè il 3–tessuto considerato ammette un gruppo ∞^1 di trasformazioni non omografiche in sè ([12]).

Vediamo ora come si colleghino gli invarianti I_i con la nozione di *proiettività tangenziale* introdotta dal Bompiani. Si tratta di quanto segue: consideriamo una delle tre tangenti in P_0 alle curve del 3-tessuto per quel punto; dando uno spostamento infinitesimo a P_0 in modo da portarlo in $P_0 + dP_0$ la retta considerata prima si sposterà anch'essa ed incontrerà la sua primitiva posizione in un punto; nasce così una proiettività fra le direzioni uscenti da P_0 ed i punti della tangente considerata. Tale proiettività è appunto la proiettività tangenziale del Bompiani relativa alla tan-

([11]) Si veda l'op. cit. in ([10]).

([12]) La osservazione pare sia sfuggita al Dubourdieu che, a pag. 23 della sua op. cit. in ([10]), afferma che i 3-tessuti formati da tre fasci di rette a centri non allineati e proiettivamente distinti sono ∞^1 (mentre invece sono tutti proiettivamente identici), come pure afferma che i 3-tessuti di rette a configurazione esagonale proiettivamente distinti sono ∞^4 (mentre invece sono ∞^1 soltanto).

gente considerata. Cerchiamo ora l' equazione della proiettività tangenziale relativa alla tangente $\omega_1 - \omega_2 = 0$ ad esempio ([13]). Sia

$$X = P_1 + P_2 + \mu P_0$$

un punto variabile sulla predetta tangente al variare di μ. Si ha:

$$X + dX = P_0(d\mu + \mu + \mu\omega_{00} + \omega_{10} + \omega_{20}) +$$
$$+ P_1(1 + \mu\omega_1 + \omega_{11} + \omega_{21}) + P_2(1 + \mu\omega_2 + \omega_{12} + \omega_{22}).$$

Se ne trae subito che l' equazione della proiettività tangenziale è

$$\mu = \frac{(I_2 - I_4)\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \tag{10}$$

Si vede così che le proiettività tangenziali sono tutte e tre degeneri se, e solo se, il 3–tessuto è di rette. Ma non mi soffermerò di più sulle precedenti considerazioni.

4. Veniamo al problema della deformazione proiettiva dei 3–tessuti. Sia P_0 il punto che descrive le curve del primo e Q_0 il punto che descrive le curve del secondo 3–tessuto. Siano poi

$$\omega_1{}^3 - \omega_2{}^3 = 0 \quad , \quad \Omega_1{}^3 - \Omega_2{}^3 = 0$$

le relative forme differenziali. Poichè i due 3–tessuti si corrispondono, per ipotesi, essi dovranno essere topologicamente equivalenti e si potrà dunque supporre di aver scelto i parametri in modo che

$$\omega_1 = \Omega_1 \quad , \quad \omega_2 = \Omega_2 . \tag{11}$$

Indicheremo con Ω_{ij} le espressioni analoghe alle ω_{ij}, ma relative al secondo 3-tessuto. Allora affinchè vi sia contatto geometrico omografico del 2° ordine fra le curve dei due 3–tessuti uscenti rispettivamente dai punti P_0 e Q_0 dovrà essere ([14])

$$\omega_1{}^2(\Omega_{12} - \omega_{12}) - \omega_1\omega_2(\Omega_{11} - \Omega_{22} - \omega_{11} + \omega_{22}) - \omega_2{}^2(\Omega_{21} - \omega_{21}) = 0 \tag{12}$$

quando sia

$$\omega_1{}^3 - \omega_2{}^3 = 0 .$$

([13]) Analogamente per le altre due tangenti. Osserviamo che le condizioni affinchè le curve del 3-tessuto siano rette sono $I_1 = I_4 = I_2 - I_3 = 0$, e ciò in relazione all'ultimo capoverso di questo n. 3.

([14]) Come risulta da ragionamenti ben noti, usati anche nella teoria della superficie (Cfr. op. cit. in ([9])).

Ma le (11) forniscono per differenziazione esterna

$$\begin{aligned} \Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00} &= a\omega_1 + b\omega_2 \\ \Omega_{21} - \omega_{21} &= b\omega_1 + c\omega_2 \\ \Omega_{12} - \omega_{12} &= l\omega_1 + m\omega_2 \\ \Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00} &= m\omega_1 + n\omega_2 . \end{aligned}$$

Dovrà dunque essere

$$2m - a = 0 \quad , \quad l = c \quad , \quad 2b - n = 0 ;$$

d'altra parte si vede subito che spostando convenientemente punti Q_1, Q_2 si può far sì che sia $a = n = 0$ e quindi anche $b = m = 0$. In definitiva, ponendo $-k = c = l$, il sistema che fornisce i 3-tessuti proiettivamente applicabili è

$$(13) \qquad \begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{00} &= \Omega_{11} - \Omega_{00} \\ \omega_{21} &= \Omega_{21} + k\omega_2 \\ \omega_{12} &= \Omega_{12} + k\omega_1 \\ \omega_{22} - \omega_{00} &= \Omega_{22} - \Omega_{00} . \end{aligned}$$

Se $k = 0$, la differenziazione esterna delle equazioni del sistema scritto mostra che i due 3-tessuti sono omografici, e solo allora lo sono.

Supponiamo di aver scelto per il primo 3-tessuto il riferimento intrinseco del n. 2, sicchè valgano le (7); si vede allora senza difficoltà alcuna, dalle (13), che si può scegliere l'omografia che realizza il contatto delle curve dei due 3-tessuti in modo che in essa al riferimento intrinseco associato al primo corrisponda quello associato al secondo 3-tessuto. Indicando con I_i^* gli invarianti del secondo 3-tessuto si conclude infine che le condizioni perchè i due 3-tessuti siano deformabili l'uno nell'altro sono

$$(14) \qquad I_1 = I_1^* \quad , \quad I_4 = I_4^* \quad , \quad I_2 - I_3 = I_2^* - I_3^* .$$

Per terminare indichiamo i calcoli che si dovrebbero effettuare per discutere il sistema (13) ed ottenere le condizioni a cui debbono soddisfare le I_i affinchè un dato 3-tessuto ammetta qualche deformato non omografico, sia cioè formato dalle curve caratteristiche di qualche trasformazione.

La differenziazione esterna delle equazioni (13), tenuto conto della (7), fornisce dopo passaggi che ometto

$$(15)\qquad \begin{aligned} \Omega_{10} - \omega_{10} &= h\omega_1 + \{k(k - I_2 - I_3)\}\,\omega_2 \\ \Omega_{20} - \omega_{20} &= \{k(k - I_2 - I_3)\}\,\omega_1 + g\omega_2 \end{aligned}$$

$$(15')\qquad dk = (g + kI_1)\,\omega_1 + (h + kI_4)\,\omega_2 .$$

Ancora per differenziazione esterna, tenendo conto delle (7), (8), (13) e (15) si trova

$$(16)\qquad \begin{aligned} dh &= (f + A)\,\omega_1 + B\omega_2 \\ dg &= C\omega_1 + (f - A)\omega_2 \end{aligned}$$

dove A, B, C sono espressioni nelle I_i e quelle che ne derivano applicando ripetutamente l'operazione (9), oltre a k, g, h.

Infine le (16) per differenziazione esterna forniscono

$$(17)\qquad df = D\omega_1 + E\omega_2 ,$$

dove D, E sono ancora espressioni del tipo delle A, B, C contenenti anche f. Differenziando esternamente (17) si ottiene una relazione finita in k, g, h, f; differenziandola e sostituendo a dk, dg, dh, df, le loro espressioni note si ottengono due nuove relazioni finite in k, g, h, f e così via [15]. In generale quelle relazioni saranno soddisfatte soltanto per $k = g = h = f = 0$; ma calcolando le prime sei, ed eliminando fra esse k, g, h, f si otterranno due condizioni nelle I_i, e le quantità che ne derivano mediante (9), necessarie e sufficienti affinchè il 3-tessuto descritto da P_0 ammetta qualche deformato proiettivo non omografico.