SILVIA NOTO

Sulle equazioni differenziali del tipo (Q).

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 298–301.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_298_0>

Sulle equazioni differenziali del tipo (Q).

Nota di SILVIA NOTO (a Torino).

Sunto. - *Si determinano i sistemi* ∞^4 *di linee di una superficie che godono della « proprietà proiettiva » (esistenza — per le linee contenenti un* E_1 *ed un punto prefissati — di una corrispondenza proiettiva tra il fascio degli* E_2 *contenenti l'*E_1 *ed il fascio delle rette tangenti nel punto) in prima, seconda, terza approssimazione.*

Le equazioni differenziali del tipo (Q), cioè le equazioni differenziali del quart'ordine che si possono scrivere nella forma:

$$(1)\quad v^{IV} = A(u, v, v', v'')v'''^2 + B(u, v, v', v'')v''' + C(u, v, v', v'')$$

sono già state oggetto di un mio precedente lavoro ([1]). Di queste equazioni o meglio dei sistemi ∞^4 Σ di curve che esse rappresentano su una superficie qualunque S (su cui si adottino coordinate curvilinee u e v) darò ora una nuova caratterizzazione proiettiva. secondo un punto di vista analogo a quello adottato dal prof. TERRACINI ([2]) in una Nota riguardante certe equazioni differenziali del terz' ordine.

([6]) Si è supposto $a_{11} \neq 0$, ma allo stesso risultato si previene se è $\neq 0$ un altro coefficiente a_{ik}.

([1]) S. NOTO, *Proprietà geometriche delle equazioni differenziali del tipo* $y^{IV} = A(x, y, y', y'')y'''^2 + B(x, y, y', y'')y''' + C(x, y, y', y'')$, « Rend. del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino », vol. 8, 1948, pp. 209-221. V. anche i lavori di KASNER ivi citati, e W. W. SAWYER, *On some theorems of Silvia Noto*, ibid., vol. 9, 1949, pp. 173-177.

([2]) A. TERRACINI: *Sobre las ecuaciones diferenciales de tipo* (G) *y de tipo* (F), « Revista de Mat. y Fís. teór. de la Univ. de Tucumán », vol. 6, 1948.

Dirò che un sistema $\infty^4\Sigma$ di curve di una superficie qualunque S possiede la « proprietà proiettiva » quando per le curve di Σ che passano per un $E_1(A, a)$ e per un punto B genericamente prefissati esiste una corrispondenza proiettiva tra il fascio dei loro E_2 contenenti l'$E_1(A, a)$ e quello delle tangenti in B ([3]).

In questa Nota studierò la possibilità che la proprietà proiettiva sussista in senso approssimato, cioè per un punto B infinitamente vicino al punto A, in vari ordini di approssimazione.

Supponiamo il sistema Σ definito da un'equazione differenziale del quart'ordine:

$$v^{\mathrm{IV}} = \varphi(u, v, v', v'', v''') \tag{2}$$

nella funzione incognita $v(u)$ [φ funzione analitica dei suoi cinque argomenti]. Sia $A \equiv (u_0, v_0)$, $v_0' = m$, $B \equiv (u, v)$, e poniamo:

$$v_0'' = t; \qquad v_0''' = \alpha; \qquad v_0^{\mathrm{IV}} = \varphi; \qquad v_0^{\mathrm{V}} = \psi; \qquad v_0^{\mathrm{VI}} = \omega. \tag{3}$$

La proprietà proiettiva si può tradurre nella condizione che, per una curva integrale variabile passante per l'$E_1(A, a)$ e per B, posto $\theta = \dfrac{dv}{du}$ e considerando θ come funzione di t, la $\theta(t)$ soddisfi all'equazione differenziale:

$$2\theta'\theta''' - 3\theta''^2 = 0 \tag{4}$$

la quale traduce il fatto che la $\theta(t)$ si ottiene da t mediante una sostituzione lineare fratta.

Consideriamo una soluzione $v(u)$ della (2) come funzione non solo di u, ma anche dei valori iniziali u_0, v_0, v_0', v''_0, v_0''', di modo che scriviamo:

$$v = f(u_0, v_0, m, t, \alpha, u) \tag{5}$$

e poniamo:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial u_0}; \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial v_0}; \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial m}; \quad f_4 = \frac{\partial f}{\partial t}; \quad f_5 = \frac{\partial f}{\partial \alpha}; \quad f_6 = \frac{\partial f}{\partial u}; \text{ ecc.} \ldots$$

Poniamo anche per una funzione $\Phi(u_0, v_0, m_t, t, \alpha, u)$:

$$\begin{aligned} J[\Phi] &= f_5\Phi_4 - f_4\Phi_5, \\ L[\Phi] &= f_5^2\Phi_{44} - 2f_4f_5\Phi_{45} + f_4^2\Phi_{55}, \\ M[\Phi] &= f_5^3\Phi_{444} - 3f_5^2f_4\Phi_{445} + 3f_5f_4^2\Phi_{455} - f_4^3\Phi_{555}. \end{aligned}$$

([3]) Ha senso parlare di una tale corrispondenza proiettiva in quanto il fascio degli E_2 di un piano contenenti un dato E_1 è assimiliabile ad una forma di prima specie, per esempio al fascio delle coniche ottenute congiungendo ciascuno di quegli E_2 con una coppia di punti fissi generici M, N del piano stesso. Tali fasci di coniche, al variare della coppia MN sono tra loro proiettivi, e permettono di introdurre una coordinata proiettiva per un E_2 del fascio considerato. Per l'$E_1(u_0, v_0, v_0')$ come coordinata proiettiva dell'$E_2(u_0, v_0, v_0', v_0'')$ si può assumere la v_0''.

Trasformiamo ora la (4). Tenendo presente che α è funzione di t definita implicitamente dalla (5), per cui:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{f_4}{f_5}, \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{L[f]}{f_5^3}$$

si ha:

$$\theta = f_6$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{J[f_6]}{f_5}$$

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{f_5 L[f_6] - f_{56} L[f]}{f_5^3}$$

$$\theta''' = \frac{d^3\theta}{dt^3} = \frac{f_5^2 M[f_6] - 3f_5 J[f_{56}]L[f] + 3f_{56} J[f_5]L[f] - f_5 f_{56} M[f]}{f_5^5}.$$

Sostituendo nella (4) e moltiplicando per f_5^6, si ottiene:

$$2J[f_6]\,\{ f_5^2 M[f_6] - 3f_5 J[f_{56}]L[f] - 3f_{56} J[f_5]L[f] - f_5 f_{56} M[f] \} - \\ - 3\,\{ f_5 L[f_6] - f_{56} L[f] \}^2 = 0. \tag{6}$$

Per considerare la proprietà proiettiva in forma approssimata, poniamo: $u = u_0 + h$ e sviluppiamo il primo membro della (6) in serie di potenze di h. Indichiamo con (T), senza scriverla esplicitamente, l'equazione che si ottiene in tal modo. Orbene, se non si particolarizza il sistema Σ, il primo membro della (T) inizia con un termine in h di grado ≥ 19. Diciamo perciò che il sistema Σ gode della proprietà proiettiva in prima approssimazione almeno quando questo grado è > 19, in seconda approssimazione almeno quando è > 20, in terza approssimazione almeno quando è > 21.

Annullando il coefficiente di h^{19} si ottiene la condizione:

$$\varphi_{\alpha\alpha\alpha} = 0 \tag{7}$$

la quale è soddisfatta quando e solo quando l'equazione differenziale (2) è del tipo (Q).

Dunque, *su una superficie* S *i sistemi* ∞^4 *di curve che possiedono la proprietà proiettiva in prima approssimazione almeno sono i sistemi di tipo* (Q).

Annullando il coefficiente di h^{20}, e tenendo conto della (7), si trova che la proprietà sussiste in seconda approssimazione almeno quando e solo quando:

$$45\varphi_{\alpha\alpha}^2 + 40\varphi_{t\alpha\alpha} - 16\psi_{\alpha\alpha\alpha} = 0 \tag{8}$$

cioè quando:

$$A(u, v, v', v'') = \frac{4}{3v'' + \rho(u, v, v')} \tag{9}$$

dove $\rho(u, v, v')$ è una funzione arbitraria.

Annullando il coefficiente di h^{21}, e tenendo conto delle (7), (8), si trova che condizione necessaria e sufficiente affinchè la proprietà sussista in terza approssimazione almeno è:

$$\begin{aligned}(10)\qquad & 40\varphi_{tt\alpha} - 48\psi_{t\alpha\alpha} - 120\varphi_\alpha\varphi_{t\alpha\alpha} + 12\omega_{\alpha\alpha\alpha} + 42\varphi_\alpha\psi_{\alpha\alpha\alpha} + \\ & + 150\varphi_{\alpha\alpha}\varphi_{t\alpha} - 90\varphi_{\alpha\alpha}\psi_{\alpha\alpha} - 45\varphi_\alpha\varphi_{\alpha\alpha}^2 = 0\end{aligned}$$

da cui, integrando, si trova per la funzione $B(u, v, v', v'')$ l'espressione:

$$(11)\quad B = \frac{3\sigma(u, v, v')v''^2 + 2[2\rho_{v'}(u, v, v') + \rho(u, v, v')\sigma(u, v, v')]v'' + 2\tau(u, v, v')}{2[3v'' + \rho(u, v, v')]}$$

dove $\sigma(u, v, v')$ e $\tau(u, v, v')$ sono funzioni arbitrarie.

Una interpretazione geometrica della (11) non appare semplice. Si ha invece una interpretazione geometrica semplice della (9), come risulta da quanto segue.

Nel mio lavoro loc. cit. ([1]) ho definito per un sistema ∞^1 di E_4 di un dato piano contenenti uno stesso E_2, una « *configurazione di tipo* λ », intendendo con ciò che i suddetti ∞^1 E_4 appartengano a coniche per un punto. E per un sistema (Q) di una superficie S appartenente allo spazio ordinario ho cercato i « centri di proiezione λ », cioè i centri di proiezione tali che per le curve del sistema gli E_4 contenenti un E_2 genericamente prefissato si proiettino su di un piano in una configurazione di tipo λ. Ho trovato che i centri di proiezione λ relativi a un E_2 di una superficie S e a un sistema (Q) definito sopra la superficie dall'equazione differenziale (1) hanno per luogo un piano appartenente al fascio formato dal piano tangente alla superficie nel centro dell'E_2 e dal piano osculatore all'E_2. Ho definito tale piano come « *piano principale* » *relativo all'* E_2 *dato.*

Orbene, quando per l'equazione differenziale (1) sussiste la condizione (9), il piano principale relativo all'$E_2(u, v, v', v'')$ dipende solo dall E_1 dell'E_2, e viceversa, come emerge dalla (31) di l. c. ([1]). Perciò:

condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema ∞^4 di curve di una superficie appartenente allo spazio ordinario goda della proprietà proiettiva in seconda approssimazione almeno è che esso sia un sistema (Q) *tale che per ogni* E_1 (A, a) *della superficie il piano principale relativo ad un* E_2 *variabile contenente quell'* E_1 *risulti fisso.*