Bollettino
Unione Matematica Italiana

Carmelo Fusa

Generalizzazione di un lemma di Chisini.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 307–311.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_307_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Generalizzazione di un lemma di Chisini.

Nota di CARMELO FUSA (a Tregnago, Verona) (*).

Sunto. - *È dato dal secondo dei due lemmi enunciati qui appresso.*

Al fine di alleggerire la redazione d'una ricerca sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve [1] di genere p, pubblico separatamente, in questa Nota, la dimostrazione d'un lemma che contiene, come caso particolare, quello di O. CHISINI relativo alle reti omaloidiche. Il lemma di O. CHISINI [2] è il seguente:

Se A_0 *è un punto base di (massima) molteplicità* h_0 *per una rete omaloidica di curve* C_n *d'ordine* n, *ed i punti base della rete* $A_1, A_2, \ldots A_t$, *prossimi ad* A_0, *posseggono molteplicità* $h_1, h_2, \ldots, h_t$ *tali che*

$$\sum_{i=0}^{t} h_i > n,$$

allora esiste un altro punto base A *(proprio o almeno non prossimo ad* A_0*) la cui molteplicità* h *soddisfa alla relazione:*

$$2h > n - h_0.$$

Questa proposizione è stata estesa ai sistemi lineari di curve razionali ed ellittiche da F. CONFORTO [3].

Qui mi propongo di stabilire il seguente

LEMMA. - *Se* A_0 *è un punto base di massima molteplicità* $h_0 \leq n - 2 - 2(p-1)/n$ *per un sistema lineare* $|C_n|$, *irriducibile, di grado* $d \geq 2(p-1) + 2d/(n-h_0)$, *di genere* p *e di dimensione* r

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma. Ringrazio vivamente il chiar.mo prof. BENIAMINO SEGRE per i consigli datimi per questo lavoro.

[1] Le curve che si considerano sono sempre piane algebriche.

[2] O. CHISINI, *Sul teorema di Noether relativo alla decomponibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche.* « Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena », s. V, vol. VI, 1921-22. F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Bologna, 1924, vol. III, pp. 170-71.

[3] F. ENRIQUES e F. CONFORTO, *Le superficie razionali.* Bologna, Zanichelli, 1939 (1945), pp. 289-93, 317-19.

($r \geq 1$), *formato da curve* C_n *d'ordine* n, *ed i punti base del sistema* $A_1, A_2, \ldots, A_t$, *prossimi ad* A_0, *posseggono molteplicità* $h_1, h_2, \ldots, h_t$ *tali che*

$$\sum_{i=0}^{t} h_i > n,$$

allora esiste un altro punto base A *(proprio o almeno non prossimo ad* A_0*) la cui molteplicità* h *soddisfa alla relazione:*

$$h > (n - h_0)/2.$$

Incominciamo col dimostrare che esiste necessariamente almeno un punto base di $| C_n |$ non prossimo ad A_0. Detti $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ i punti base di $| C_n |$ distinti da A_0, di rispettive molteplicità $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$, si tratta di provare che è $\nu > t$.

Premettiamo a questo fine due osservazioni.

Prima osservazione: il grado d del sistema, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, soddisfa alla disuguaglianza:

$$d < 2n + 2(p - 1).$$

Poiché infatti per ipotesi è $\sum_{i=0}^{t} h_i > n$, sarà altresì la somma delle molteplicità di tutti i punti base del sistema:

$$\sum_{i=0}^{\nu} h_i \geq \sum_{i=0}^{t} h_i > n.$$

Ma è

$$\sum_{i=0}^{\nu} h_i = 3n + 2(p - 1) - d \text{ (4)},$$

e quindi

$$d < 2n + 2(p - 1).$$

Seconda osservazione: in un sistema lineare irriducibile di curve di genere p, per il quale sia $d < 2n + 2(p - 1)$ e $h_0 \leq n - 2 - 2(p - 1)/n$, dev'essere:

$$h_0 < \sum_{i=1}^{\nu} h_i .$$

Invero se si congiunge il punto A_0 ai punti $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ con delle rette contate rispettivamente $h_1, h_2, \ldots, h^\nu$ volte, si ha una

(4) Ved. per es. G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*. « Memorie dell'Acc. di Torino », s. II, t. XLII, 1891. « Memorie Scelte », Bologna, Zanichelli, 1937, pag. 137 e segg.

curva spezzata di ordine $\sum_{i=1}^{\nu} h_i$, che ha il punto A_0 come $(\sum_{i=1}^{\nu} h_i)$-plo e che ammette nei punti $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ le molteplicità virtuali $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ rispettivamente. Questa curva interseca una curva generica di $| C_n |$ in $n \cdot \sum_{i=1}^{\nu} h_i$ punti, dei quali, almeno $h_0 \cdot \sum_{i=1}^{\nu} h_i + \sum_{i=1}^{\nu} h_i^2$ sono riuniti nei punti base di $| C_n |$. Sarà dunque

$$n \cdot \sum_{i=1}^{\nu} h_i \geq h_0 \cdot \sum_{i=1}^{\nu} h_i + \sum_{i=1}^{\nu} h_i^2 .$$

Ma è

$$\sum_{i=1}^{\nu} h_i^2 = n^2 - d - h_0^2 \text{ (}^5\text{)},$$

e quindi viene

$$(n - h_0) \sum_{i=1}^{\nu} h_i \geq n^2 - d - h_0^2 .$$

Poiché $d < 2n + 2(p - 1)$, ne discende

$$(n - h_0) \sum_{i=1}^{\nu} h_i > n(n - 2) - 2(p - 1) - h_0^2 .$$

Se ora fosse $\sum_{i=1}^{\nu} h_i \leq h_0$, verrebbe

$$(n - h_0)h_0 > n(n - 2) - 2(p - 1) - h_0^2 ,$$

ossia

$$h_0 > n - 2 - 2(p - 1)/n .$$

Ma ciò non può essere, nelle ipotesi ammesse. Ne viene che deve aversi

$$h_0 < \sum_{i=1}^{\nu} h_i ,$$

come asserito. Si vede inoltre che, nella precedente argomentazione, la disuguaglianza $h_0 \leq n - 2 - 2(p - 1)/n$ non potrebbe venir sostituita da altra meno restrittiva.

Ciò premesso, siamo in grado di provare che, nelle ipotesi enunciate, esiste necessariamente almeno un punto base di $| C_n |$ non prossimo ad A_0.

Infatti le molteplicità dei punti base prossimi ad A_0 sono notoriamente tali che

$$\sum_{i=1}^{t} h_i \leq h_0 .$$

[5] Ved. per es. G. CASTELNUOVO, *loc. cit.* in [4].

Ma la somma delle molteplicità di tutti i punti base di $| C_n |$, escluso A_0, è — come s'è visto — maggiore di h_0: ne segue che, oltre ad $A_0, A_1, \ldots, A_t$, devono esistere altri punti base del sistema, conseguentemente non prossimi ad A_0, come abbiamo asserito.

Ora, per il punto base A di massima molteplicità h, fuori di $A_0, A_1, \ldots, A_t$, sarà

$$h \geq \frac{h^2_{t+1} + h^2_{t+2} + \ldots + h^2_\nu}{h_{t+1} + h_{t+2} + \ldots + h_\nu},$$

ossia

$$h \geq \frac{n^2 - d - h^2_0 - \sum\limits_{i=1}^{t} h_i^2}{3n + 2(p-1) - d - \sum\limits_{i=0}^{t} h_i}.$$

Ma poiché per le ipotesi fatte è

$$\sum_{i=0}^{t} h_i > n, \qquad \sum_{i=1}^{t} h_i \leq h_0,$$

$$h_1 \leq n - h_0, \qquad h_2 \leq n - h_0, \ldots, \qquad h_t \leq n - h_0,$$

avremo altresì

$$h > \frac{n^2 - d - h_0^2 - h_0(n - h_0)}{3n + 2(p-1) - d - n} = \frac{n(n - h_0) - d}{2n + 2(p-1) - d}.$$

Notiamo che nell'ultima frazione tanto il numeratore che il denominatore sono positivi. Sappiamo infatti, per la prima osservazione, che

$$2n + 2(p-1) - d > 0.$$

Essendo poi per ipotesi $h_0 \leq n - 2 - 2(p-1)/n$, si ha

$$n(n - h_0) \geq 2n + 2(p-1),$$

da cui

$$n(n - h_0) - d \geq 2n + 2(p-1) - d > 0.$$

È ora facile provare, tenuto conto della $d \geq 2(p-1) + 2d/(n - h_0)$, che deve essere

$$h > (n - h_0)/2.$$

Invero, in caso contrario risulterebbe

$$\frac{n(n - h_0) - d}{2n + 2(p-1) - d} < \frac{n - h_0}{2},$$

ossia

$$d < 2(p-1) + 2d/(n - h_0).$$

Ma ciò non può essere, nelle ipotesi enunciate. Si ha dunque per il punto base A di massima molteplicità h del sistema lineare $| C_n |$, fuori di $A_0, A_1, \ldots, A_t$,

$$2h > n - h_0,$$

come asserito.