Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Conte

Vincenzo Viviani e la “figura di Torricelli”

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 334–340.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_334_0>

Vincenzo Viviani e la "figura di Torricelli".

Nota di LUIGI CONTE (a Torino).

Sunto. - *Come risulta dalle prime righe della Nota.*

La lettura di due Note, l'una del BONFERRONI, nella quale viene dimostrata una proposizione molto più generale del «teorema di NAPOLEONE», [1] e l'altra del NATUCCI, relativa ai limiti tra i quali è compresa la somma dei segmenti congiungenti i vertici d'un poligono convesso con un punto ad esso interno, [2] hanno richiamato alla mia memoria alcune ricerche di V. VIVIANI riguardanti la cosidetta «*figura di* TORRICELLI» [3] ed un classico problema di minimo: di esse voglio qui discorrere, sopratutto per la maniera elementare e puramente geometrica con cui tali ricerche sono condotte dal loro Autore.

1. Fra le note ed aggiunte di VINCENZO VIVIANI al Libro I di EUCLIDE, [4] si legge la seguente proposizione. «*In ogni triangolo rettangolo il triangolo equilatero costruito sull'ipotenusa è uguale* [5] *alla somma dei triangoli equilateri costruiti sui cateti*».

Perchè il lettore non abbia a sorridere come per una dichiarazione di ingenuità, deve sapere [6] che il sedicenne VIVIANI,

[1] C. BONFERRONI, *Un teorema sul triangolo e il teorema di Napoleone*, in «Boll. Un. Mat. It.», n. 1, 1950, pag. 85-89. Per un'altra dimostrazione dello stesso teorema, vedi: G. VAROLI, *Di un teorema sul triangolo*, ibidem, n. 3-4, 1950, pag. 360-363.

[2] A. NATUCCI, *Relazioni perimetriche in triangoli e poligoni*, in «Periodico di Matematiche», n. 2, 1951 pag. 98-101.

[3] Viene, di solito, così denominata la figura formata da un triangolo e dai tre triangoli equilateri costruiti sui lati del primo.

[4] V. VIVIANI, *Quinto Libro degli Elementi di Euclide*, ... Firenze, MDCLXXIV, pag. 1 5-132.

[5] VIVIANI, al pari di EUCLIDE, non fa distinzione fra uguaglianza ed equivalenza.

[6] Le notizie storiche che seguono sono tratte da una lettera (3-2 1668) del VIVIANI, al gesuita ADAMO ADAMANDO, al quale, richiestone, inviava della proposizione enunciata le dimostrazioni trovate una trentina d'anni prima, e già a moltissimi altri da tempo comunicate.

iniziando lo studio degli Elementi, senza l'ausilio d'un precettore, era rimasto talmente colpito dal teorema di PITAGORA che, ignorando ancora quello che sulle aree dei poligoni simili si legge nel Libro VI di EUCLIDE, si era subito domandato se la proprietà valida per i quadrati non valesse pure per i poligoni regolari aventi il minimo numero di lati possibile. Messosi al lavoro, con gioia non inferiore a quella con cui PITAGORA avrebbe compiuto la leggendaria ecatombe, trovò della suddetta proposizione due dimostrazioni: nella prima vien provato che complessivamente i due triangoli equilateri costruiti sui cateti equivalgono a quello costruito sull'ipotenusa; nella seconda, invece, si procede in maniera analoga a quella euclidea, viene cioè provato quale parte del triangolo equilatero costruito sull'ipotenusa equivale a ciascuno dei triangoli equilateri costruiti sui cateti.

In seguito, quando aveva già studiato i primi quattro Libri degli Elementi, meditando sulla figura che gli era servita per la prima dimostrazione, il NOSTRO ne scoprì certe proprietà « *levia equidem, at scitu non iniucunda, quorum nonnulla Tyronibus* (7) *tantum Geometris explicare libet* », alcune delle quali valgono pure se il triangolo non è rettangolo (8).

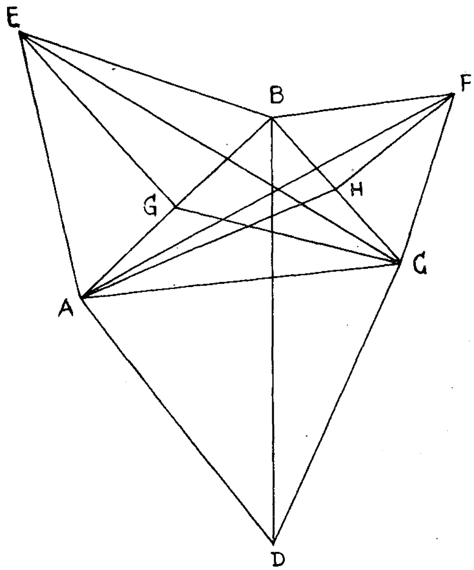

Fig. 1.

2. *Prima dimostrazione.* Costruiti i triangoli equilateri ADC, ABE, BFC sull'ipotenusa AC e sui cateti AB e BC del triangolo rettangolo ABC (fig. 1), si congiungano E, F, D rispettivamente con C, A, B (9) sitracci la EG parallela a BC: EG sarà altezza e mediana nel triangolo ABE, e di conseguenza

$$\triangle EGC = \triangle EGB, \quad \text{e} \quad \triangle AGC = \frac{1}{2} \triangle ABC -$$

(7) Per questa ragione VIVIANI si esprime in maniera un pò prolissa, anche se classica.

(8) Per le proprietà della « figura di Torricelli » relativa ad un triangolo qualunque, vedi: A. NEPPI-MODONA, *Sopra una proprietà del triangolo*, in « Suppl. al Periodico di Matematica », 1905, fasc. VI-VIII, pag. 86; A. COLUCCI, *Su alcune proprietà del triangolo*, ibidem, 1915, fasc. IX, pag. 134-135.

(9) VIVIANI, dimostra in seguito che queste tre congiungenti passano per uno stesso punto.

Pertanto:

$$(1)\qquad \triangle ACE = \triangle EGA + \triangle EGC + \triangle AGC = \triangle EGA + \triangle EGB + \frac{1}{2}\triangle ABC = \triangle ABE + \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

Analogamente, conducendo FH parallela ad AB, si dimostra che:

$$(2)\qquad \triangle ACF = \triangle BCF + \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

Sommando (1) e (2):

$$(3)\qquad \triangle ACE + \triangle ACF = \triangle ABE + \triangle BCF + \triangle ABC = AEBFCA.$$

Ma è pure:

$$\triangle ACE = \triangle ABD \quad ; \quad \triangle ACF = \triangle BCD,$$

quindi la (3) si scrive:

$$(3')\qquad \triangle ABD + \triangle BCD = ABCD = AEBFCA.$$

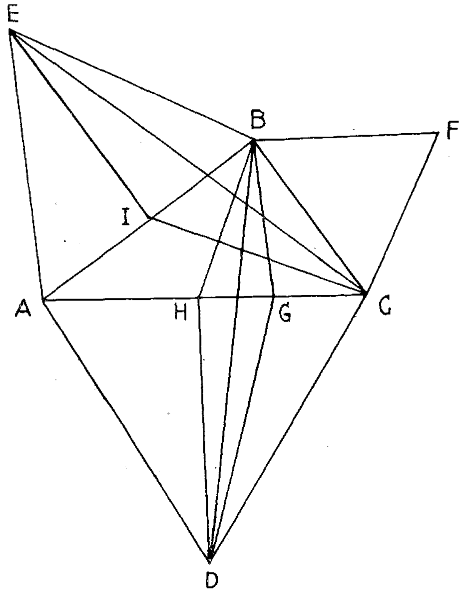

Fig. 2.

E togliendo da ambo i membri dell'ultima eguaglianza il triangolo ABC:

$$(4)\qquad \triangle ACD = \triangle ABE + \triangle BCF.$$

Seconda dimostrazione. Condotta l'altezza BG relativa all'ipotenusa AC (fig. 2), dico che:

(5) $$\triangle ADG = \triangle AEB \quad , \quad \triangle CDG = \triangle BFC.$$

Infatti, detti I ed H i punti medi di AB e AC, si traccino le DH, EI, DB, EC, BH, CI: risulteranno DH ed EI rispettivamente parellele a BG e BC. Pertanto:

(6) $$\triangle DGH = \triangle DHB \quad ; \quad \triangle ECI = \triangle EIB;$$

ed è pure

(7) $$\triangle HBC = \frac{1}{2} \triangle ABC = \triangle AIC,$$

onde

(8) $$\begin{aligned} \triangle ADH + \triangle DHG = \triangle ADH + \triangle DHB = \triangle AEC - \triangle AIC = \\ = \triangle AIE + \triangle EIC = \triangle AIE + \triangle IEB, \end{aligned}$$

cioè la prima delle (5).

Analogamente si dimostra la seconda delle (5), e quindi per somma si ha la (4).

3. Ritornando alla prima dimostrazione, VIVIANI consegue qualche altro risultato.

Circoscritti i cerchi ai tre triangoli equilateri costruiti sui lati

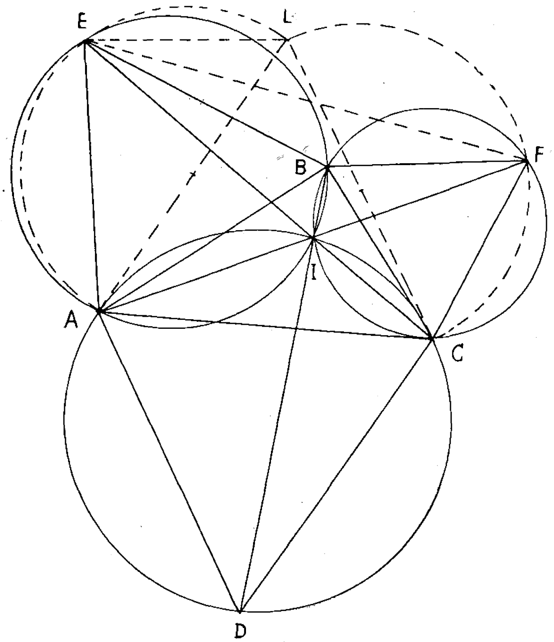

Fig. 3,

del triangolo dato (fig. 3), sia I il punto d' incontro delle congiungenti AF, CE:

a) I segmenti DB, FA, EC *congiungenti i vertici dei tre triangoli equilateri con quelli degli angoli del triangolo dato ad essi rispettivamente opposti, sono uguali fra loro, ed uguali a* EF *congiungente i vertici dei due triangoli equilateri costruiti sui cateti.*

Infatti, i due triangoli CAE, DAB sono sovrapponibili con una rotazione di 60°, quindi $CE = BD$. Analogamente $AF = DB$, onde $AF = DB = CE$.

Ma anche i triangoli ABF, EBF sono uguali, per avere due lati uguali, ed uguali fra loro ed a $\frac{5}{3}$ di retto gli angoli ABF, EBF, sicchè $EF = AF = DB = CE$.

b) Le predette tre congiungenti passano per uno stesso punto I: basterà dimostrare che i punti D, I, B sono allineati.

Infatti, dall' uguaglianza dei triangoli ABF, CEB, segue $\widehat{FAB} = \widehat{CEB}$. Inoltre $\widehat{AIC} = \widehat{IEA} + \widehat{IAE} = \widehat{IEA} + \widehat{IAB} + \widehat{BAE} =$ $= \widehat{IEA} + \widehat{IEB} + \widehat{BAE} = \widehat{BEA} + \widehat{BAE} = \frac{4}{3}$ retto, onde il cerchio circoscritto al triangolo equilatero ADC passa per I.

Ma $\widehat{AID} = \widehat{DIC} = \frac{2}{3}$ retto, quindi anche $\widehat{AIE} = \frac{2}{3}$ retto $= \widehat{ABE}$, cioè anche il triangolo circoscritto al triangolo ABE passa per I.

È pure $\widehat{EIB} = \widehat{EAB} = \frac{2}{3}$ retto $= \widehat{DIC}$; sicchè essendo E, I, C allineati, tali saranno pure D, I, B.

Da questa proprietà segue l' altra:

c) I sei angoli che le AF, BD, CE *formano in* I *sono uguali.*

d) I cerchi circoscritti ai tre triangoli equilateri ADC, ABE, BCF, *passano tutti per* I.

È stato già dimostrato che i primi due di questi cerchi passano per I; analogamente lo si dimostra per il cerchio BCF.

e) Se tenendo fissa la base AC *si fa variare il vertice* B *dell' angolo retto sul semicerchio di diametro* AC, *il punto* I *varierà sull' arco* ACI *terza parte del cerchio circoscritto al triangolo equilatero* ADC.

f) Se ALC *è il triangolo equilatero costruito su* AC *nel semipiano non contenente* D, *al variare di* B *sul semicerchio di diametro* AC, *i vertici* E *ed* F *dei triangoli equilateri costruiti sui cateti variano sui semicerchi di diametri rispettivi* AL *e* CL.

Infatti, essendo $\widehat{CAL} = \widehat{BAE}$, aggiungendo o togliendo secondo le posizioni di B l' angolo $\widehat{BAL}$, si avrà $\widehat{CAB} = \widehat{LAE}$, ed i due triangoli CAB, LAE avendo due lati e l' angolo compreso uguali, risulteranno uguali, e quindi $EL = BC$, e $\widehat{AEL} = \widehat{ABC} = 1$ retto. Analogamente per il vertice F.

g) *Il punto* I *è quello la somma delle cui distanze dai vertici del triangolo* ABC *ed anche dai vertici del triangolo* DEF *è minima.*

Infatti, ciascuno degli angoli AIC, CIB, BIA, DIF, EIF, EID è $\frac{4}{3}$ di retto, e quindi per la prop. 6ª dell'Appendice alla Divinazione dei Massimi e Minimi (10) segue l'asserto.

4. La proprietà contemplata in (*g*) è caso particolare d'un problema di minimo di cui VIVIANI s'era già occupato.

Com'è noto a lui si deve una divinazione del Libro V delle Coniche di APOLLONIO, la quale avrebbe dovuto comprendere tre Libri; ma non avendo l'A. condotto a termine il terzo, ne pubblicò i primi due con l'aggiunta d'una Appendice, nella quale fece posto a delle proposizioni (11) o perchè non del tutto utili a questo progettato terzo Libro, o perchè non avevano trovato incondizionata approvazione in coloro ai quali le aveva mostrate. Tra le altre vi si legge la generalizzazione d'un problema già risoluto da TORRICELLI, in tre modi diversi, (12) nel caso d'un triangolo: « *dato in un piano un poligono convesso di* n ≥ 3 *lati, trovare un punto ad esso interno tale che sia minima la somma delle sue distanze dai vertici del poligono dato* ».

La dimostrazione che VIVIANI diede della risoluzione dell'indicato problema di minimo, fu ritenuta *ingeniosam* da CHR. HUYGENS, (13) nonostante egli trovasse che nella divinazione vivianea non ci fossero « *de fort grandes subtilitez* » ; nel paragrafo seguente vedremo in cosa consiste questa riconosciuta ingegnosità.

5. VIVIANI fa anzitutto un'osservazione preliminare. Sia dato un poligono regolare P_n di n lati e di vertici A_i; detta $d_i(0)$ la distanza che un punto qualunque O *non esterno* a P_n (in particolare, il centro del poligono) ha dal lato A_iA_{i+1} è

$$\sum_{1}^{n} d_i(0) = \frac{2P_n}{\text{perimetro}} ;$$

(10) V. VIVIANI, *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apolloni Pergaei adhuc desideratum*, Florentiae, MDCLIX, Libro II, pag. 143-140.

(11) Forse anche a questo terzo Libro erano destinate alcune questioni di massimo che troviamo, in numero di cinque, nel Libro III della divinazione vivianea del « *De locis solidis* » di ARISTEO IL VECCHIO. Per un esame di questo Libro rimando ad un mio lavoro in corso di stampa in « Archives Internationales d'Histoire des Sciences ».

(12) E. TORRICELLI, *Opere*, a cura di G. LORIA e G. VASSURA, Vol. I, Parte II, pag. 90-97.

(13) CHR. HUYGENS, *Oeuvres complétes*, Tome III, pag. 61, vedi: lettera del 7-4-1660, a Heinsins.

e quindi, se $0'$ è un' altro punto del piano di P_n, è sempre

$$\sum_1^n d_i(0) \leq \sum_1^n d_i(0'), \tag{9}$$

il segno di disuguaglianza valendo solo se $0'$ è esterno al poligono.

TEOR. I. – *La somma delle distanze d' un punto* P *dai vertici* A_i *d' un qualunque poligono regolare è minima se quel punto è il centro* 0 *del poligono.*

Infatti, conducendo per i vertici A_i le perpendicolari ai segmenti OA_i, si ottiene un poligono P_n' di vertici A_i', simile a quello dato e concentrico con esso. Se ora abbassiamo da P le perpendicolari h_i sui lati di questo nuovo poligono, per la precedente osservazione è

$$\sum_1^n OA_i \leq \sum_1^n h_i.$$

Ma essendo le perpendicolari minori delle oblique

$$\sum_1^n OA_i \leq \sum_1^n h_i < \sum_1^n PA_i. \tag{10}$$

TEOR. II. – *Se da un punto* 0 *partono in un piano* n *segmenti* OA_i, *e gli angoli* A_iOA_{i+1} *sono tutti uguali, e se* I *è un' altro punto qualunque dello stesso piano, è*

$$\sum_1^n OA_i < \sum_1^n IA_i. \tag{11}$$

Infatti, se ad esempio OA_1 è il maggiore dei segmenti dati per 0, si stacchi sulla semiretta OA_1 il segmento $OP_1 \geq OA_1$, e sulle altre semirette per 0 i segmenti $OP_i = OP_1$; si otterrà un poligono regolare di vertici P_i, e quindi, per il teor. precedente,

$$\sum_1^n OP_i < \sum_1^n IP_i < \sum_1^n (IA_i + A_iP_i),$$

donde la (11).

Infine VIVIANI aggiunge che il teor. II vale anche per il triangolo ABC ciascuno degli angoli del quale sia inferiore a 120°, dopo aver provato che, in tale ipotesi, gli archi capaci di 120° descritti sui lati AB e BC internamente al triangolo, si segano in un punto interno al triangolo stesso.

E credo si possa concludere, nonostante il poco sereno giudizio di ROBERVAL, [14] che sia davvero geniale questa generalizzazione, ottenuta con mezzi puramente geometrici, d' un problema venuto d' oltre Alpi.

[14] Vedi: A. AGOSTINI, *Problemi di massimo e minimo nella corrispondenza di* E. TORRICELLI, in « Rivista di Matematica della Università di Parma », 2, 1951, pag. 265-275.