Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Brusotti

La “piccola variazione” nei suoi aspetti e nel suo ufficio.

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 430–444.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_430_0>

La "piccola variazione" nei suoi aspetti e nel suo ufficio.

Conferenza di LUIGI BRUSOTTI (a Pavia). (1)

Sunto. - *Si offre un rapido sguardo d'assieme sull'ufficio che ai metodi di " piccola variazione " spetta nella trattazione delle questioni di realità riflettenti gli enti algebrici, in relazione anche ai differenti aspetti ch' essi rivestono in rapporto alle diverse impostazioni teoretiche, dalle più elementari alle più elevate.*

1. È storicamente provato come l'intuizione visiva, negli studi matematici e più particolarmente in quelli geometrici, sia elemento di innegabile valore euristico e chiarificatore.

Talora volutamente lasciato in ombra perchè più netto risulti

(2) Cfr., G. SANSONE: Op. cit. in (1), pag. 55.

(1) Conferenza tenuta a Bologna il 3 maggio 1952, per invito del Semi-

il preminente posto spettante agli assetti logici e formali, riaffiora in determinati momenti ed ambienti, e non solo nelle rappresentazioni grafiche ben provvide per le applicazioni alle scienze sperimentali ed alla tecnica, ma pur a vantaggio di studî aventi interesse immediato puramente teoretico.

Di un movimento così diretto fu efficace assertore ed artefice FELICE KLEIN, specialmente in rapporto alla Geometria algebrica ([2]) così nel campo della variabilità complessa specialmente per il tramite della superficie di RIEMANN, come in quello della variabilità reale colla costruzione di suggestivi modelli, che trovarono accoglienza anche nelle nostre Università, circostanza codesta cui può oggi raccostarsi una recente iniziativa dell'Unione matematica italiana ed in particolare del Collega LUIGI CAMPEDELLI, intesa appunto a dare diffusione all'uso di modelli geometrici nell'insegnamento ([3]).

Ed alle vedute del KLEIN sull'uso delle *Riemanniane simmetriche,* nello studio delle curve algebriche reali, si riallacciano ricerche sulle superficie (e varietà superiori) algebriche reali, fra cui primeggiano quelle (ormai classiche) dovute ad ANNIBALE COMESSATTI, troppo presto mancato alla scienza ([4]).

Ma qui si vuol fissare l'attenzione sui cosiddetti procedimenti di " piccola variazione ,, che traggono la loro origine dalla diffi-

([2]) Specialmente nei periodi 1872-76, 1892-95. I lavori di F. KLEIN in tale indirizzo trovansi raccolti in *Gesammelte mathematische Abhandlungen,* 2, Berlin 1922, pp. 1-251, sotto il comune titolo *Anschauliche Geometrie* ed hanno interesse le *Vorbemerkungen* (ivi pp. 3-4) che lo stesso Autore vi ha premesso.

([3]) Precisamente l'assemblea straordinaria dei soci dell'Unione matematica italiana, tenutasi il 29 ottobre 1951, in occasione del IV Congresso nazionale, ha deliberato di organizzare, coll'aiuto degli Istituti che ne facciano richiesta, la costruzione di alcune serie di modelli per ausilio ai consueti insegnamenti di Geometria e di Analisi. É stato incaricato di curare la realizzazione pratica del progetto il Prof. Luigi Campedelli della Università di Firenze. Cfr. perciò questo « Bollettino » (3), 6 (1951) p. 366- Allo stesso « Bollettino » saranno affidate ulteriori comunicazioni.

([4]) Per riferimenti bibliografici e per preziose vedute d'assieme sull'opera svolta da A. COMESSATTI in tale indirizzo, vedansi i due rapporti da lui stesso redatti: A. COMESSATTI, *Reelle Fragen in der algebraischen Geometrie,* « Jahresbericht der D. M. V. », 41 (1931), pp. 107-134; *Problemi di realtà per le superficie e varietà algebriche,* « R. Acc. d'Italia (IX Convegno Volta, Atti) », Roma 1943, pp. 15-41.

Un elenco completo delle pubblicazioni di A. COMESSATTI leggesi per es. in L BERZOLARI, *Annibale Comessatti, Commemorazione,* « Rend. Ist. Lomb. » (parte generale), 73 (1945-46), pp. 39-72.

coltà di trattare questioni di realità sugli enti algebrici e specialmente di risolvere i corrispondenti problemi esistenziali coi procedimenti diretti offerti dall' algebra, appena si abbandonino i casi più elementari. Ed, a proposito, conviene ricordare che qui per *ente algebrico reale* s' intende ogni ente algebrico rappresentabile con equazioni a coefficienti reali anche se privo di punti reali.

2. Delle considerazioni di continuità che sono a fondamento dei procedimenti di " piccola variazione „ se pur qualche traccia può intravedersi in ISACCO NEWTON (5), più espliciti e sicuri segni si incontrano in A. F. MÖBIUS per le curve piane di terz' ordine (6) e, per curve piane d' ordine qualunque, in G. K. CLIFFORD, nella sua interessante opera *Il senso comune nelle scienze esatte* (7), una delle più tipiche manifestazioni di una mente geniale che, per il suo fervore, assai più avrebbe dato se a lui fosse stata concessa meno breve vita (8).

Prescindendo dal già ricordato contributo del KLEIN, che del procedimento fece più largo uso, e pur dell' opera di H. G. ZEUTHEN (9), sono specia mente da ricordarsi (alla distanza di un quindicennio l' uno dall' altro) gli apporti di A. HARNACK (10) e di D. HILBERT (11), a cui altri (ma non molti) ne seguono, fors' anche

(5) Nella *Enumeratio linearum tertii ordinis.* Cfr. *Opera* (edite da S. HORSLEY), Londra 1799, pp. 529-560, ove però le sporadiche considerazioni di continuità sono sempre intese ad illustrare la comparsa di una singolarità come caso-limite e non al passaggio inverso caratteristico degli attuali metodi di « piccola variazione ».

(6) A. F. MÖBIUS, *Ueber die Grundformen der Linien der dritter Ordnung,* « Abh. K. Sachs. Gesellschaft der Wiss. », 1 (1851), pp. 81; oppure *Werke*, 2 (Leipzig 1880), pp. 80-176.

(7) G. K. CLIFFORD, *Il senso comune nelle scienze esatte*, Milano, 1886, p. 110. La traduzione italiana, anonima, è però notoriamente dovuta a G. A. MAGGI ed ha fatto subito seguito all' opera originale, uscita postuma, a sei anni dalla morte dell' autore, ma in talune parti da lui delineata assai prima di questa.

(8) Sul valore del CLIFFORD (1845-1879) vedasi un significativo giudizio del KLEIN; cfr. F. KLEIN, *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie,* « Math. Ann. », 37 (1890), pp. 544-570, a p. 546; oppure *Gesammelte mathematische Abhandlungen,* 1, Berlin 1921, p. 354.

(9) H. G. ZEUTHEN, *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre,* « Math. Ann. », 7 (1874), pp. 410-432.

(10) A. HARNACK, *Ueber die Vieltheiligheit der ebenen algebraischen Curven,* « Math. Ann. », 10 (1876), p. 189-198.

(11) D. HILBERT, *a) Ueber die reellen Züge algebraischer Curven,* « Math. Ann. », 38 (1891), pp. 115-138, oppure *Gesammelte Abhandlungen,* 2 (Berlin,

perchè lo HILBERT ebbe ad additare tali ordini di studî in un memorabile elenco di questioni aperte ch' egli presentò in occasione del Congresso internazionale di Parigi nel 1901 ([12]). Ed attraverso a pause, ad interruzioni ed a riprese, ben si giunge così fino ai giorni nostri.

3. Ma conviene ormai fissare la " piccola variazione " in uno de' suoi concreti aspetti, nel caso più elementare in cui venga essa applicata ad una curva piana algebrica reale

$$f = 0 \tag{1}$$

entro un fascio

$$f + tg = 0 \tag{2}$$

ove sia

$$g = 0 \tag{3}$$

un' altra curva algebrica reale (dello stesse ordine) e t un parametro reale.

Se $|t|$ è abbastanza piccolo perchè l' andamento della parte reale di (2) possa dedursi mediante considerazioni di continuità da quello della parte reale di (1), la (2) si dirà dedotta da (1) con un procedimento di " piccola variazione ".

Innanzi tutto è da osservarsi come da (2) si ricavi

$$t = -\frac{f}{g} \tag{4}$$

1938), pp. 415-436. Dello stesso autore si può ricordare anche: *b*) *Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung,* « Gött. Nachrichten », 1909, pp. 308-313, oppure *Gesammelte Abhandlungen,* 2 (cit.), pp. 449-453.

([12]) D. HILBERT, *Sur les problèmes futurs des Mathématiques* in *Compte rendu du deuxième Congrès internationel des Mathématiciens,* Paris, 1902, pp. 58-114, a p. 96.

Tra i lavori posteriori a codesta data, qui si ricordano quelli di L. S. HULBURT, V. RAGSDALE, P. FIELD, K. ROHN, L. BRUSOTTI, A. ROSENBLATT, M. PIAZZOLLA BELOCH, G. BIGGIOGERO, A. WIMAN, B. BIGNARDI, H. HILTON, C. GIGLI, M. A. FARINA, V. E. GALAFASSI, L. TORRE, M. P. GUGLIADA, B. BIGI ..., su alcuni dei quali si avrà occasione di ritornare.

Riferimenti negli articoli della *Encycl. der Math. Wiss.* redatti da L. BERZOLARI e da K. ROHN *u.* L. BERZOLARI; inoltre in A. ROSENBLATT, *Untersuchungen über die Gestalten der algebraischen Kurven sechster Ordnung,* « Bull. Ac. des Sciences de Cracovie (Math.) », 1949, pp. 635-676; L. BRUSOTTI, *Sul numero dei circuiti delle curve algebriche reali di una quadrica reale,* « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », (5), 3 (1942), pp. 113-120; V. E. GALAFASSI, *Indirizzi e metodi in " questioni di realità "* « Rendiconti del Seminario matematico (Torino) », 9 (1949-50), pp. 77-93.

per cui la t si presenta come funzione razionale del punto corrente e la (2) come curva di livello di questa, onde le regioni prodotte nel piano proiettivo dalle parti reali delle (1), (3), complessivamente considerate, possono contrassegnarsi coi segni $+$ e $-$ che vi assume la (4) in modo che a regioni limitrofe competano segni opposti. Ed avverrà che una trasformata di (1) per " piccola variazione „ avrà parte reale che si svolge tutta in regioni di egual segno.

Cambiando il segno di t si avrà una seconda trasformata; e le due trasformate si diranno dedotte da (1) mediante procedimenti fra loro *complementari.*

4. Per semplicità si supponga che gli eventuali punti-base reali del fascio (2) siano semplici e distinti e che le eventuali singolarità reali della (1) siano soltanto punti doppî ordinarî.

Ciò posto, e ricordato come la parte reale di una curva piana algebrica reale consti di circuiti (e di eventuali punti isolati), per un segmento di un circuito della (1) scevro da punti-base, l'andamento delle parti reali delle due trasformate sarà quello illustrato da Fig. 1, ove per esse si è usato rispettivamente tratto continuo sottile o punteggiato; mentre se interviene un punto-base, l'andamento è quello di Fig. 2.

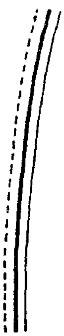

Fig. 1

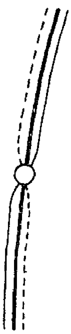

Fig. 2

In prossimità ad un punto P, doppio (ordinario) reale di (1) risp. a rami reali od isolato si presenterà l'andamento illustrato risp. da Fig. 3 e da Fig. 4, nel secondo caso una delle trasformate non intervenendo colla sua parte reale nell'intorno di P [13].

Bastano codesti criterî per conoscere sotto l'aspetto qualitativo la parte reale della curva dedotta per " piccola variazione „.

In pratica, prescindendo dall' intorno dei punti doppî reali della

[13] L' andamento è elementarmente noto nel caso delle coniche prossime ad una coppia reale di rette, risp. nell'alternativa di rette reali od immaginario-coniugate. Nel caso generale potrà anche giovare la considerazione di una retta reale condotta per il punto doppio e dell' involuzione segnata su di essa dalle curve del fascio. Il punto stesso farà parte del gruppo jacobiano dell' involuzione come punto doppio del gruppo di questa segnato dalla (1) e, quando il gruppo varia nell' involuzione, sarà approssimato da una coppia reale di punti, o reali od immaginario-coniugati a seconda del segno di t (e cioè in relazione ai due procedimenti complementari).

(1), si può senz'altro operare come se la parte reale di (2), anzichè svolgersi in prossimità di quella di (1), coincidesse con questa; ma in prossimità dei punti isolati di (1) si interverrà come già si è disposto ed in prossimità dei punti doppî a rami reali si effet-

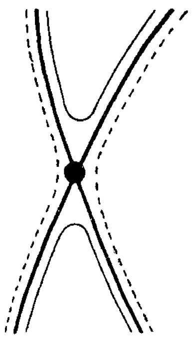

Fig. 3

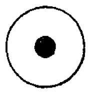

Fig. 4

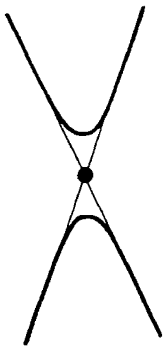

Fig. 5

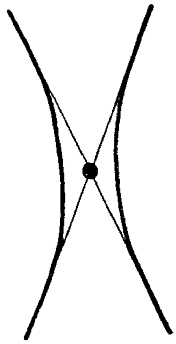

Fig. 6

tuerà uno scostamento dalla parte reale di (1) mediante raccordi o *collegamenti* in campi opposti al vertice e perciò pertinenti a regioni di egual segno, così come per le due trasformate complementari è risp. indicato da Fig. 5 e da Fig. 6.

Dopo di che è immediato che, sotto l'aspetto della topologia del piano proiettivo, se d è il numero dei punti doppî (ordinarî) reali della (1), è 2^d il numero dei presumibili e distinti procedimenti di " piccola variazione „ ad essa applicabili.

Rimarrebbe a vedersi ancora se siano essi algebricamente realizzabili, cioè se, topologicamente fissato il comportamento, sempre esista una scelta della

$$g = 0$$

(e del segno di t) che lo realizzi.

La risposta, affermativa, è stata data, con un metodo iperspaziale e con l'applicazione di un teorema sulle cosiddette curve aggiunte alla (1), aventi l'ordine di questa ([14]).

5. Del procedimento descritto sono attuabili estensioni in vario senso, così a fasci reali in condizioni più generali di quelle supposte per (2), come a sistemi (algebrici, reali) semplicemente infiniti, non fasci [il che consente di conservare punti doppî (reali) anche variabili, non intervenendo più il teorema del BERTINI ([15])],

([14]) Cfr. L. BRUSOTTI, *Sulla " piccola variazione „ di una curva piana algebrica reale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (5), 80_1 (1921), pp. 375-379.

([15]) Cfr. E. BERTINI, *Sui sistemi lineari*, « Rend. Ist. Lomb. », (2), 15 (1882), pp. 24-28; oppure *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazî*, Messina 1912, pp. 269-271.

sia sostituendo a curve piane curve variabili sopra una superficie, o superficie ecc. ([16]).

È anzi possibile subordinare alla « piccola variazione », applicata ad una superficie algebrica reale dotata di singolarità reali, quella conseguente per curve algebriche reali su di essa tracciate ([17]).

Così per la « piccola variazione » applicata ad una curva come per quella applicata ad una superficie ha particolare interesse il caso in cui la curva, o la superficie, sia riducibile.

([16]) Il teorema esistenziale dimostrato in ([14]) è ivi esteso anche al caso della curva piana variabile in un sistema ∞^1 algebrico non lineare.

Per l'applicazione a curve (algebriche) sopra superficie (algebriche), per quanto concerne le quadriche, oltre alla classica trattazione di HILBERT ([11]), *a)*, sono da tenersi presenti i lavori di M. PIAZZOLLA-BELOCH, C. GIGLI, L. BRUSOTTI [cfr., anche per citazioni, L. BRUSOTTI, ([12])]; per quanto riguarda le superficie cubiche quelli di M. PIAZZOLLA-BELOCH e di V. E. GALAFASSI; per rigate razionali altri di V. E. GALAFASSI; per superficie d'ordine qualunque taluni di L. BRUSOTTI, p. es.: *Sulla curva completa intersezione di due superficie algebriche reali*, « Rend. Ist. Lomb. », 61 (1928), pp. 470-476.

Sull'applicazione dei processi di "piccola variazione" alle superficie, richiamati i precedenti di L. SCHLÄFLI per la superficie cubica [in « Ann. di Mat. », (2), 5 (1872), pp. 289-295; 7 (1875), pp. 193-195] e di F. KLEIN, ([2]), possono ricordarsi: L. BRUSOTTI, *Sui modelli algebrici di un sistema di* k *falde*, in *Atti del primo congresso dell' Un. Mat. It.* (Firenze 1937), Bologna 1938, pp. 251-253; *Le superficie algebriche reali come modelli in questioni d' isotopia*, « Rend. Ist. Lomb. (Scienze) », 77 (1938-1939), pp. 111-127, *Sull' ordine di connessione delle superficie algebriche reali*, « Rend. Ist. Lomb. (Scienze) », 78 (1944-45), pp. 360-366; V. E. GALAFASSI, *I tipi di superficie cubica generale reale dedotti per "piccola variazione" da superficie cubiche riducibili*, « Rend. Ist. Lomb. (Scienze) », 74 (1940-41), pp. 17-29; M. P. GUGLIADA, *I tipi di superficie cubica generale reale dedotti per "piccola variazione" di una rigata cubica reale*, « Rend. Ist. Lomb. (Scienze) », 77 (1943-44), pp. 15-23.

([17]) La subordinazione della "piccola variazione" di una curva a quella di una superficie viene attuata in C. GIGLI, *Alcuni risultati sulle curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali*, « Boll. Un. Mat. It. », (2), 1 (1939), pp, 19-24; *La "piccola variazione" di una coppia di piani nella generazione di curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali*, « Rend. Ist. Lomb. (Scienze) », 73 (1939-40), pp. 327-348 (alla quale fa seguito, pp. 349-354, una Nota collo stesso titolo di L. BRUSOTTI); e da V. E. GALAFASSI, con diverse Note concernenti curve algebriche reali sopra una superficie cubica generale reale, pubblicate in « Rend. Ist. Lomb. (Scienze) », 74 (1940-41), pp. 515-547; 75 (1941-42), pp. 365-372, pp. 427-504; 77 (1943-44), pp. 105-136.

Con riserva di ritornare (num. 8) sul caso della curva, per ciò che ha riguardo alle superficie possono giovare i seguenti rilievi.

È noto che (prescindendo da eventuali punti isolati o linee isolate) la parte reale di una superficie algebrica reale consta di un numero finito di *falde* (bidimensionali, chiuse, da intendersi in un modello, nel senso della geometria proiettiva).

Tale parte reale può perciò *reticolarsi* in infinite maniere, ma, se si indica risp. con

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$$

il numeio delle relative celle 0 — dimensionali (o vertici), unidimensionali (o spigoli), bidimensionali (o facce), il numero:

$$Z = -\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 + 2 \tag{5}$$

sempre rimane costante, e, secondo la nomenclatura del COMESSATTI, dicesi *ordine di connessione* della superficie algebrica reale.

Siano ora

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0 \tag{6}$$

due superficie algebriche reali risp. di ordini

$$n_1, \qquad n_2,$$

ed alla superficie

$$f_1 f_2 = 0. \tag{7}$$

con esse composta, si applichi un procedimento di " piccola variazione „ entro il fascio

$$f_1 f_2 + tg = 0 \tag{8}$$

ove sia

$$g = 0 \tag{9}$$

una superficie algebrica reale d' ordine

$$n = n_1 + n_2.$$

Si supporranno le (6) prive di singolarità reali e di mutui contatti reali e si introdurranno i cosiddetti punti-base, cioè le intersezioni reali (qui supposte semplici e distinte) della (9) colla curva comune alle superficie (6).

Se h è il loro numero, e siano risp.:

$$Z_1, Z_2$$

gli ordini di connessione delle (6), utilizzando (coll' intervento dei punti-base, fra i vertici) opportune reticolazioni sulle parti reali delle (6) e della (8), ove è da supporsi $|t|$ abbastanza piccolo, si trova una interessante relazione che permette di esprimere in funzione dei dati l'ordine di connessione della trasformata ([18]); precisamente si ha:

$$Z = Z_1 + Z_2 + h - 2. \tag{10}$$

6. Ma ad una più elevata visione del procedimento di " piccola variazione „ in un indirizzo che può farsi risalire a FRANCESCO SEVERI ([19]), si può pervenire nel modo che segue.

Per semplicità facciasi riferimento alle curve algebriche di assegnato ordine n giacenti in uno spazio S_r (ad r dimensioni) e generalmente ad esso appartenenti (cioè non giacenti in spazî di minore dimensione); e dapprima si operi nell' ambito della variabilità complessa.

È noto ch' esse distribuisconsi in *famiglie*, intendendosi per famiglia una totalità di curve dello stesso ordine, che, pensate le curve come elementi, risulti una varietà algebrica irriducibile e non contenuta in consimili varietà di maggior dimensione. Nel piano, fissato n, la famiglia è unica (è anzi un sistema lineare).

Se la curva generica della famiglia è priva di singolarità ed irriducibile, essa avrà un certo genere p. I caratteri n, p non sono però sempre sufficienti (in S_r) ad individuare la famiglia ([20]).

La curva, variando entro di questa, può acquistare singolarità p. es. un punto doppio ordinario o *nodo*; ma sarà da distinguersi fra il caso in cui l' acquisto del nodo abbassa di un' unità il genere (*nodo proprio*) da quello in cui non lo abbassa (*nodo improprio*); denominazioni codeste dovute al SEVERI ([21]). E la considerazione può generalizzarsi, con estensione a distinzioni fra singolarità *proprie* ed *improprie* in circostanze meno elementari.

Tra le eventualità per cui la curva acquista singolarità è particolarmente notevole quella in cui la curva si spezza in componenti (è riducibile). Ed invero, indipendentemente da ulteriori particolarità, la comparsa di singolarità è in tale evenienza inevitabile, perchè considerazioni di continuità sulla superficie di RIE-

([18]) Della (10) si hanno esempî, risp. per $n = 2$, $n = 3$ in C. GIGLI ([17]) ed in V. E. GALAFASSI ([16]).

([19]) F. SEVERI, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di esistenza di Riemann*, « Rend. Acc. Lincei », (5), 24_1 (1915), pp. 877-888, 1011-1020 a pp. 1019-1020; *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, ibid., 25_1 (1916), pp. 459-471, 551-562, a pag. 556.

([20]) Per tutto ciò cfr. specialmente F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Leipzig - Berlin 1921, (*Anhang* G) pp. 353-401.

([21]) Cfr. F. SEVERI, ([20]), pp. 355-359.

MANN accertano che ogni componente possiede almeno un punto comune con una almeno delle altre, ed anzi in modo che (intesi tali punti come *punti di connessione*) la curva spezzata proveniente per degenerazione dalla curva irriducibile è una *curva connessa*.

Ora in tali vedute (estendibili anche a varietà superiori) può opportunamente inquadrarsi il procedimento di " piccola variazione ".

Precisamente si consideri una curva D, algebrica, reale, generalmente dotata di singolarità e suppongansi noti i caratteri topologici della relativa parte reale.

Di più si supponga che sia lecito attribuire tale curva ad una determinata famiglia F, di cui la generica curva C sia priva di singolarità ed irriducibile.

Allora entro F esisteranno curve C reali generiche prossime alla data D ed il procedimento di " piccola variazione " potrà così pensarsi inteso a trarre mediante considerazioni di continuità le proprietà della parte reale di una tale C da quelle note della D.

7. Sarà subito da segnalarsi il divario che, sotto questo aspetto, si rileva nella variabilità reale fra la comparsa di un nodo proprio e quella di un nodo improprio.

Invero nella prima alternativa le parti reali delle curve C prossime alla D dotata di nodo si presenteranno come trasformate di quella di D per " piccola variazione " nei modi già illustrati

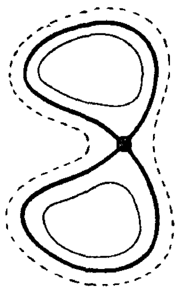

Fig. 7

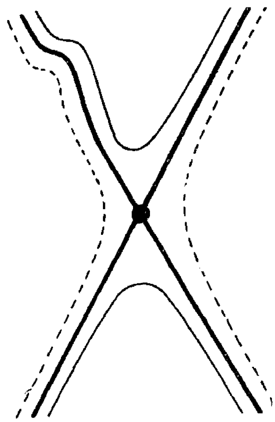

Fig. 8

con mezzi più elementari (num. 3) ed il passaggio attraverso alla D potrà anche alterare di un' unità il numero dei circuiti della parte reale di C, carattere codesto pertinente alla topologia intrinseca della parte reale e quindi invariante per trasformazioni birazionali reali.

L' alterazione si presenterà quando il nodo sia punto isolato (cfr. Fig. 4), oppure quando (Fig. 7) i due rami (reali) di esso siano di uno stesso circuito (caso dell' *intreccio*) mentre non si presenterà

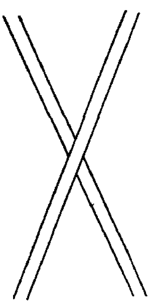

Fig. 9

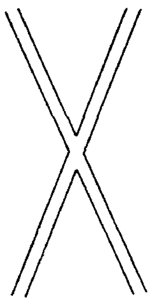

Fig. 10

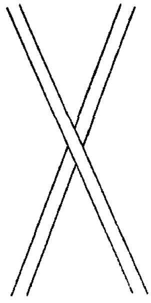

Fig. 11

nel caso (Fig. 8) di due rami pertinenti a due circuiti distinti (caso dell' *incrocio*).

Nella seconda alternativa invece, il nodo improprio si interpreta come l' accidentale coincidenza delle origini di due rami reali od immaginario-coniugati. Nel primo caso (Fig. 9, 10, 11) avverrà il mutuo attraversamento di due circuiti (o l' attraversamento di un circuito con se stesso); nel secondo vi sarà la comparsa per un solo istante di un punto isolato; ma sempre il numero dei circuiti rimarrà inalterato, mentre nel primo caso potranno sorgere cambiamenti in caratteri interessanti la topologia dello spazio ambiente, precisamente nello spazio ordinario di comportamenti concernenti l' allacciamento fra circuiti (*Verkettung*) od il rannodamento di un circuito in sè (*Verknotung*).

Ad esemplificazione, premesso che la sottofamiglia delle quartiche gobbe nodate è quella comune alla famiglia F' delle quartiche di prima specie (ellittiche, $p=1$) ed alla famiglia F'' delle quartiche di seconda specie (razionali, $p=0$), si avrà che la comparsa di una quartica nodata, quando si operi nella famiglia F' potrà alterare il numero (zero, uno, due) dei circuiti della C, mentre, quando si operi nella F'', per l' unico circuito in atto potrà solo mutarsi il tipo del rannodamento in sè.

S' intende che tutto ciò può dar luogo a generalizzazioni in vario senso.

8. Si svolga ora qualche particolare considerazione sulle *curve connesse reali*, i cui punti di connessione saranno dunque o reali o distribuiti in coppie di punti immaginario–coniugati. Si supporrà che la curva connessa reale D possa attribuirsi ad una famiglia F in modo che tutti i punti di connessione vi figurino come punti doppî proprî.

Si premetta che è fondamentale per le curve reali irriducibili il teorema di HARNACK ([22]); esso, coi complementi arrecatigli dal KLEIN ([23]), può cosi enunciarsi:

Per ciascun valore del genere p, *esistono curve la cui parte reale consta di* k *circuiti, per tutti e soli i valori di* k *soddisfacenti alla*

$$0 \leq k \leq p + 1. \tag{11}$$

Una curva connessa reale, pensata in una famiglia di cui la curva generica ha genere p, verrà detta *curva massimale*, allorchè fra le sue trasformate per " piccola variazione „ entro la famiglia, ve ne sia una dotata di $p + 1$ circuiti.

Così un esempio semplice di curva massimale è quello fornito da un multilatero connesso composto di due rette sghembe immaginario–coniugate e di $p + 1$ rette (reali) congiungenti $p + 1$ punti della prima coi loro immaginario–coniugati sulla seconda, in quanto dalla teoria delle curve connesse subito risulta ([24]) la appartenenza ad una famiglia la cui curva generica ha genere p, ed è immediata l' esistenza delle trasformate i cui $p + 1$ circuiti provengano da quelli delle $p + 1$ rette reali ([25]).

([22]) Cfr. A. HARNACK, ([10]).

([23]) Cfr. F. KLEIN, *Ueber die conforme Abbildung von Flächen*, « Math. Ann. », 19 (1882), pp. 159-160; *Ueber Riemanns' Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882, p. 72, oppure *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3, Berlin 1923, p. 564; *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der* φ, « Math. Ann. », 42 (1892), pp. 1-29, oppure *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 2, Berlin 1922, pp. 170-197.

([24]) Cfr. p. es. F. SEVERI, ([20]), p. 372, essendo qui applicabile il teorema sui multilateri connessi giacenti in famiglie non speciali.

([25]) Altri esempî di multilateri massimali sono presentati in L. BRUSOTTI, *Curve algebriche reali prossime a multilateri in uno spazio* S_r, Pavia 1922. Procedimenti analoghi in cui intervenga la curva connessa opportunamente composta con una curva razionale e p corde di questa sono richiamati in V. E. GALAFASSI ([12]), p. 92.

Tutto ciò può raccostarsi anche all' intervento di curve connesse nella costruzione dei cosiddetti *modelli algebrici*; vedasi, anche per citazioni: L. BRUSOTTI, *Sul genere dei modelli algebrici di un sistema spaziale di* k *circuiti*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », (2), 1 (1932) pp. 61-77; cfr. pure L. BRUSOTTI, *Questioni di realità e modelli algebrici*, « Rendiconti del Seminario matematico (Torino) », 10 (1950-51), pp. 139-153.

Si esamini ora la questione delle curve massimali offerte dal caso di una curva connessa reale D spezzata in due componenti C_1, C_2 reali, prive di singolarità e risp. di generi p_1, p_2, di più presentanti d punti di connessione. Si pensi tale curva connessa come appartenente ad una famiglia di cui la curva generica (irriducibile) abbia genere:

$$p = p_1 + p_2 + d - 1$$

in armonia colla teoria generale delle curve connesse.

Perchè la D sia massimale è necessario e sufficiente che:

a) *Le* C_1, C_2 *siano dotate risp. di* $p_1 + 1$, $p_2 + 1$ *circuiti*;

b) Si verifichi una delle alternative seguenti:

I. *I* d *punti di connessione siano tutti reali ed egualmente ordinabili sù un solo circuito di* C_1 *ed un solo di* C_2; *di più la "piccola variazione" topologica tragga un circuito della trasformata da ciascuna coppia di segmenti corrispondenti dei due detti circuiti* (cfr. Fig. 12) *e sia subordinabile ad una "piccola variazione" algebrica della* D.

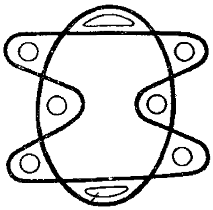

Fig. 12

II. *I punti di connessione siano due immaginario-coniugati* [26].

Il caso di più componenti irriducibili è stato preso in esame

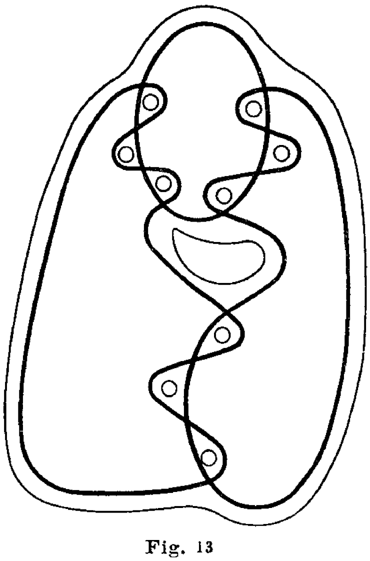

Fig. 13

[26] Questo teorema fu da me enunciato e dimostrato nel Corso di Geometria superiore tenuto nell'anno 1943-44 presso l'Università di Pavia.

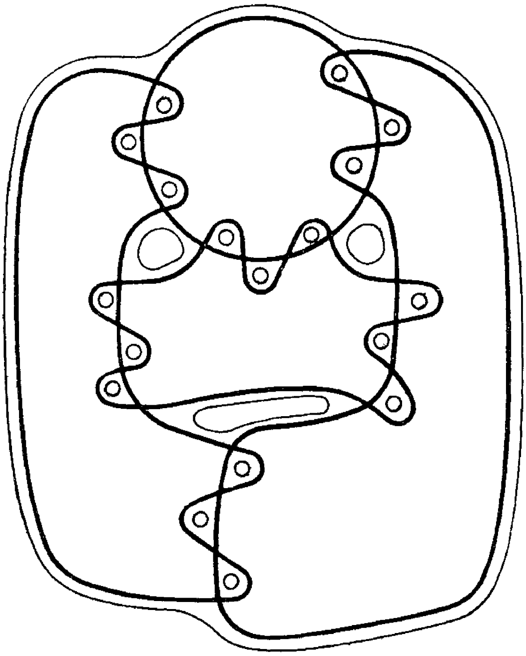

Fig. 14

dalla mia allieva Dott. BRUNETTA BIGI, con risultati sotto certi aspetti esaurienti ([27]).

9. Il problema già era stato approfondito per le curve piane ([28]). Si era trovato che per una curva connessa a componenti irriducibili reali, prive di singolarità reali e di mutui contatti reali, si è condotti a pochi tipi ben determinati.

Prescindendo dai casi ovvii della cubica spezzata in una conica a punti reali ed in una retta esterna oppure in tre distinte rette reali di un fascio, si hanno solo curve spezzate in due, tre, quattro componenti C_i, le cui mutue intersezioni essendo tutte reali e giacenti per ciascuna delle C_i sopra un solo circuito, dànno risp. luogo a coppie, terne, quaterne di circuiti ed a procedimenti di

([27]) B. BIGI, *La "piccola variazione" di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), 2 (1947), pp. 27-30, 126-129.

([28]) L. BRUSOTTI, *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante "piccola variazione" di una curva spezzata*, « Ann. di Mat. », (3), 22 (1913), pp. 117-169.

" piccola variazione „ rientranti nei modi risp. illustrati da Fig. 12, Fig. 13 e Fig. 14.

Se ne trae in particolare che per $n \geq 5$ non si hanno n-lateri piani massimali; risultano essi invece sempre massimali per $n \leq 4$,

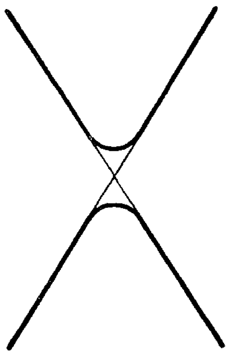

Fig 15

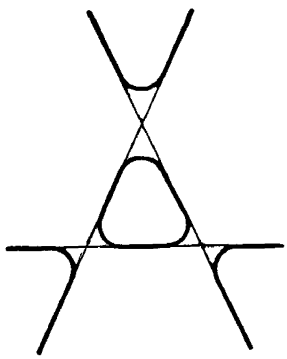

Fig. 16

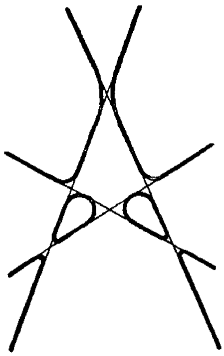

Fig. 17

come risulta dalle Fig. 15, 16, 17, ove si introducono coniche, cubiche, quartiche piane risp. con uno, due, quattro circuiti, in rispondenza ai valori zero uno, tre del genere (29).

(29) Cfr. L. Brusotti, *Curve algebriche reali prossime a multilateri* ecc. [cit. in (25)].