Bollettino Unione Matematica Italiana

Bruno Pini

Osservazioni su un teorema di M. Picone relativo all'equazione $\Delta u + cu = 0$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 19–25.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_19_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Osservazioni su un teorema di M. Picone relativo all'equazione $\Delta u + cu = 0$.

Nota di Bruno Pini (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si danno alcune estensioni di un teorema di* M. Picone *sui punti singolari delle soluzioni dell'equazione* $\Delta u + cu = 0$.

Sia A un campo dello spazio euclideo S_n ad n (≥ 2) dimensioni, di cui $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sia un punto arbitrario. Se $u(P)$ è una funzione definita in A ed $f(P)$ è una funzione definita sulla frontiera di A, $\mathfrak{F}A$, scrivendo

$$u(P) = f(P) \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}A$$

s'intende che

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \subset A}} u(P) = f(P_0)$$

per ogni punto P_0 della $\mathfrak{F}A$.

Sia $C(P)$ una funzione definita in A; si dirà che $u(P)$ è, in A, soluzione dell'equazione

$$\Delta u + C(P)u = 0 \tag{1}$$

se essa è ivi continua e dotata delle derivate che compaiono in Δu, e verifica la (1).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell' Università di Bologna.

M. Picone ha provato il seguente teorema (¹):

I. *Supposto il campo* A *limitato, di diametro* δ, *fissati su* $\mathfrak{F}A$ μ *punti* $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ *e, corrispondentemente,* μ *numeri positivi* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, *di somma* α, *convenendo di indicare con* r_i *la distanza* $\overline{PP_i}$, *e posto*

$$\omega(P) = \begin{cases} \prod_1^\mu {}_i\, r_i^{-\alpha_i} & \textit{per} \quad n > 2 \\ \prod_1^\mu {}_i \left(\lg \dfrac{e\delta}{r_i}\right)^{\alpha_i} & \textit{per} \quad n = 2 \quad (\textit{e numero di Nepero}), \end{cases}$$

una soluzione u(P) *in* A *di* (1) *è ivi identicamente nulla se*

$$\frac{u(P)}{\omega(P)} = 0 \quad su \quad \mathfrak{F}A,$$

$$C(P) < \begin{cases} \dfrac{\alpha(n-2-\alpha)}{\delta^2} & \textit{per} \quad n > 2, \quad \alpha < n-2 \\ \qquad\qquad \textit{in } A & \\ \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{\delta^2} & \textit{per} \quad n = 2, \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

F. Leja (²) ha dato il seguente perfezionamento della proposizione di M. Picone:

II. *Se* u(P) *è una soluzione dell'equazione* (1) *in* A, *posto*

$$\omega(P) = \begin{cases} \sum_1^\mu {}_i\, r_i^{-\alpha} & \textit{per} \quad n > 2 \\ \sum_1^\mu {}_i \left(\lg \dfrac{\delta}{r_i}\right)^{\alpha} & \textit{per} \quad n = 2 \end{cases}$$

ove $\delta >$ *diametro* A, *se è*

$$\frac{u(P)}{\omega(P)} = 0 \quad su \quad \mathfrak{F}A,$$

$$C(P) < \begin{cases} \dfrac{\alpha(n-2-\alpha)}{\delta^2} & \textit{per} \quad n > 2, \quad 0 < \alpha < n-2 \\ \qquad\qquad \textit{in } A & \\ \dfrac{\alpha(1-\alpha)e^2}{\delta^2} & \textit{per} \quad n = 2, \quad 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

allora è $u \equiv 0$.

(¹) M. Picone, *Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali della Fisica-matematica.* « Annales de la Soc. Polonaise de Mat. », t. XXI (1948), 161-169; cfr. anche dello stesso Autore: *Sur la théorie d'une équation aux dérivées partielles classique de la phisique mathématique,* « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences ». Paris, t. 226 (1948), 1945-1947; e *Sulle singolarità delle soluzioni di una classica equazione a derivate parziali della fisica matematica,* « Atti del 3° Congresso dell' U. M. I. », Roma 1951, 69-71.

(²) F. Leja, *Remarques sur le travail précédent de M. Picone,* « Annales de la Soc. Polonaise de Mat. », t. XXI (1948), 170-172.

Nei numeri seguenti riportiamo alcune osservazioni sulle precedenti proposizioni.

1. Cominciamo con l'osservare che il risultato di M. PICONE è ancora valido se si suppone che $\frac{u(P)}{\omega(P)}$ si annulli in media, anzichè puntualmente, sulla $\mathfrak{F}A$. Con ciò si viene contemporaneamente a provare che l'unicità della soluzione del problema generalizzato di valori al contorno di G. CIMMINO [3] per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine è valido anche se la funzione peso è infinitesima (in una certa misura) in uno o più punti della frontiera.

Sia τ un dominio dell'S_n, che per semplicità supponiamo semplicemente connesso; la sua frontiera sia una varietà regolare σ di cui

$$x_i = \bar{x}_i\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sia una rappresentazione parametrica regolare sul dominio rettangolare R.

Ad evitare complicazioni nelle formole, supponiamo che le $\bar{x}_i$ siano funzioni di classe 2.

Consideriamo le varietà:

$$\sigma(t): \qquad x_i = \bar{x}_i\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) + t\nu_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

per $t > 0$ abbastanza piccolo, essendo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ i coseni direttori della normale interna. Fissato su σ un numero finito di punti P_1, $P_2, \ldots, P_\mu$ e nell'interno di τ un numero finito di punti $P_{\mu+1}$, $P_{\mu+2}, \ldots, P_{\mu+\nu}$, indichiamo con $\sigma_i(t)$ la frontiera della ipersfera di centro $P_{\mu+i}$ e raggio t e con $\tau(t)$ il dominio che ha per contorno esterno $\sigma(t)$ e per contorni interni le $\sigma_i(t)$. Indichi $V(P)$ una funzione di classe 2 e $C(P)$ una funzione continua in $\tau - \sigma - \sum_{i=1}^{\nu} P_{\mu+i}$ (queste ipotesi, sovrabbondanti, possono sostituirsi con quelle minime che assicurano la validità delle formole seguenti) e p un numero > 1. Sussiste l'identità

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\left[\int_{\sigma(t)} |V|^p d\sigma + \sum_{1}^{\nu}{}_i \int_{\sigma_i(t)} |V|^p d\sigma\right] = \int_R \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} |V|^p\right)_{\sigma(t)} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1} +$$

$$+ (n-1)t^{n-2} \sum_{1}^{\nu}{}_i \left(\int_0^\pi\right)^{n-2} \int_0^{2\pi} |V|^p_{\sigma_i(t)} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1} -$$

$$- p \int_{\tau(t)} |V|^{p-2}\left[V\Delta V + (p-1)\sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2\right] d\tau$$

(3) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. LXI (1937), 177-220.

ove $\Omega = \left(\left\| \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right\|^2 \right)^{1/2}$ e si conviene di usare per le $\tau_i(t)$ la rappresentazione polare usuale assumendo per poli i punti $P_{\mu+i}$.

Supponiamo ora che $u(P)$ sia soluzione di $\Delta u + C(P)u = 0$ in $\tau - \sigma - \sum_1^\nu{}_i P_{\mu+i}$ e sia $\omega(P)$ una funzione sempre positiva in tale campo, e convenientemente regolare. Se $V = \frac{u}{\omega}$, in base alla

$$\Delta V + \frac{2}{\omega} \sum_1^n{}_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial V}{\partial x_k} + \left(\frac{\Delta \omega}{\omega} + C \right) V = 0,$$

si ha

$$(3) \qquad -p \int_{\tau(t)} |V|^{p-2} \left[V \Delta V + (p-1) \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \right] d\tau =$$

$$= p \int_{\tau(t)} |V|^p \left[\frac{\Delta \omega}{\omega} + C + \frac{1}{(p-1)\omega^2} \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right)^2 \right] d\tau -$$

$$- p(p-1) \int_{\tau(t)} \frac{|V|^{p-2}}{\omega^4} \sum_1^n{}_k \left(\omega \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{p}{p-1} u \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right)^2 d\tau.$$

Indicando con r_i la distanza $\overline{PP_i}$ $(P_i \equiv \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)})$, poniamo

$$(4) \qquad \omega(P) = \begin{cases} \sum_1^{\mu+\nu}{}_i \left(\frac{1}{r_i} \right)^\alpha & \text{per } n > 2, \quad 0 < \alpha < n-2 \\ \sum_1^{\mu+\nu}{}_i \left(\lg \frac{\delta}{r_i} \right)^\alpha & \text{per } n = 2, \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

e $\delta >$ diametro τ.

Per $n > 2$, tenendo presente che

$$\left| \sum_1^n{}_k \frac{(x_k - \xi_k^{(i)})(x_k - \xi_k^{(j)})}{r_i r_j} \right| \leq 1$$

e

$$\sum_1^{\mu+\nu}{}_{ij} \left(\frac{1}{r_i r_j} \right)^{\alpha+1} < \sum_1^{\mu+\nu}{}_i \left(\frac{1}{r_i} \right)^\alpha \sum_1^{\mu+\nu}{}_j \left(\frac{1}{r_j} \right)^{\alpha+2}$$

(per la diseguaglianza di LAGRANGE) e $r_i < \delta$ qualunque sia i, si ha

$$-\frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{1}{(p-1)\omega^2}\sum_1^n{}_k\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = \alpha(n-\alpha-2)\frac{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(1/r_i)^{\alpha+2}}{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(1/r_i)^{\alpha}} -$$

$$-\frac{\alpha^2}{p-1}\frac{\sum_1^{\mu+\nu}{}_{ij}(1/r_ir_j)^{\alpha+1}\sum_1^n{}_k(x_k-\xi_k^{(i)})(x_k-\xi_k^{(j)})/r_ir_j}{\left[\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(1/r_i)^{\alpha}\right]^2} >$$

$$> \alpha\frac{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(1/r_i)^{\alpha+2}}{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(1/r_i)^{\alpha}}\left(n-2-\frac{\alpha p}{p-1}\right) > \frac{\alpha}{\delta^2}\left(n-2-\frac{\alpha p}{p-1}\right).$$

Analogamente per $n = 2$ si ha

$$-\frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{1}{(p-1)\omega^2}\sum_1^2{}_k\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = \alpha(1-\alpha)\frac{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(\lg\delta/r_i)^{\alpha-2}/r_i^2}{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(\lg\delta/r_i)^{\alpha}} -$$

$$-\frac{\alpha^2}{p-1}\frac{\sum_1^{\mu+\nu}{}_{ij}(\lg\delta/r_i\lg\delta/r_j)^{\alpha-1}/r_ir_j\cdot\sum_1^2{}_k(x_k-\xi_k^{(i)})(x_k-\xi_k^{(j)})/r_ir_j}{\left[\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(\lg\delta/r_i)^{\alpha}\right]^2} >$$

$$> \alpha\frac{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(\lg\delta/r_i)^{\alpha-2}/r_i^2}{\sum_1^{\mu+\nu}{}_i(\lg\delta/r_i)^{\alpha}}\left(1-\frac{\alpha p}{p-1}\right) > \alpha\left(1-\frac{\alpha p}{p-1}\right)e^2/\delta^2$$

poichè $r_i^2(\lg\delta/r_i)^2 \leq \delta^2/e^2$.

Tenendo presenti le (2) e (3) e questi ultimi risultati, si ha che:

III. *Se* u(P) *è soluzione di* (1) *in* $\tau-\sigma-\sum_1^{\nu}{}_i P_{\mu+i}$, *se* $p>1$, *allora le condizioni*

$$\lim_{t\to 0}\int_{\sigma(t)}\left|\frac{u}{\omega}\right|^p d\sigma = 0$$

$$\lim_{t\to 0} t^{n-2}\left(\int_0^{\pi}\right)^{n-2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{u}{\omega}\right|^p_{\sigma_i(t)}\operatorname{sen}^{n-2}\theta_1\operatorname{sen}^{n-3}\theta_2\ldots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\,d\theta_1 d\theta_2\ldots d\theta_{n-1} = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

dove ω *è la funzione definita in* (4) *e* $\delta >$ *diametro* τ, *assicurano che* u(P) $\equiv 0$ *se*

$$C(P) < \begin{cases} \alpha\left(n-2-\dfrac{\alpha p}{p-1}\right)/\delta^2 & \textit{per} \quad n>2, \quad 0<\alpha<(n-2)(p-1)/p \\ \alpha\left(1-\dfrac{\alpha p}{p-1}\right)e^2/\delta^2 & \textit{per} \quad n=2, \quad 0<\alpha<(p-1)/p. \end{cases}$$

Si osservi che se $\dfrac{u}{\omega}$, completata con l'assegnarle il valore zero nei punti di σ, è continua in tutto τ, frontiera inclusa, potendosi allora prendere p comunque grande, si ritrova in particolare il risultato di PICONE-LEJA.

2. Ritornando ora al punto di vista di PICONE, osserviamo che l'infinito che costituisce la naturale «*barriera*» al teorema di unicità è il logaritmo oppure l'inverso della potenza $(n-2)$-esima della distanza, secondochè è $n=2$ oppure $n>2$.

Riferendoci per semplicità a un solo punto O della $\mathfrak{F}A$, e posto $\overline{OP}=\rho$, noi potremmo ripetere il ragionamento di PICONE, imponendo la condizione $\dfrac{u(P)}{\omega(P)}=0$ su $\mathfrak{F}A$ prendendo

$$\omega(P) = \begin{cases} (\lg k/\rho)(\lg^{(m)} k/\rho)^{-1} & \text{per} \quad n=2 \\ (\rho^{n-2}\lg^{(m)} k/\rho)^{-1} & \text{per} \quad n>2 \end{cases}$$

dove $\lg^{(m)}$ ha il significato dell'operatore lg ripetuto m volte, m un arbitrario numero naturale e k un corrispondente conveniente numero positivo; con ciò noi permettiamo alla soluzione di (1) di diventare «*più infinita*» di quanto non sia ammesso dal teorema di PICONE, permettendo a $C(P)$ di essere positiva; anzi, a questo proposito, si può osservare che solo ragioni di semplicità consigliano di porre una limitazione superiore *costante* alla $C(P)$, mentre la maggiorazione naturale è $C(P) < -\dfrac{\Delta\omega}{\omega}$, la quale, sia usando la funzione di PICONE come una di quelle indicate sopra, permette alla $C(P)$ di diventare anche positivamente infinita in O.

Ad ogni scelta di una funzione ω tale che $\dfrac{\Delta\omega}{\omega}<0$, resta associata, in base al ragionamento di PICONE, una funzione tale che se la $C(P)$ si mantiene ad essa inferiore ed è $\dfrac{u(P)}{\omega(P)}=0$ su $\mathfrak{F}A$, allora è $u(P)\equiv 0$. Si ha così tutta una gamma di proposizioni del tipo di quelle indicate. Ed è facile provare come sia possibile raggiungere la funzione «*barriera*» costituita dal logaritmo o dall'inverso della potenza $(n-2)$-esima della distanza. Ciò è assicurato, ad esempio, dalla seguente proposizione:

IV. *Se* $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ *sono punti della* $\mathfrak{F}A$, *posto* $\overline{PP_i} = r_i$, $\delta >$ *diametro* A, $k = e^2\delta$, *ed* ε *un numero positivo per cui sia sempre* $0 < \varepsilon + \pi r_i/2\delta < \pi/2$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$, *al variare di* P *in* $A + \mathfrak{F}A$, *se*

$$u(P) = 0 \quad su \quad \mathfrak{F}A - \sum_{1}^{\mu}{}_i P_i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(P)/\lg r_i = 0 \\ u(P) r_i^{n-2} = 0 \end{array} \right. \quad in \quad P_i,\ (i = 1, 2, \ldots, \mu) \quad \begin{array}{l} per \quad n = 2 \\ per \quad n > 2 \end{array}$$

e se

$$C(P) < \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sum_{1}^{\mu}{}_i \left[\dfrac{\pi^2}{4\delta^2} \cos \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \lg \dfrac{k}{r_i} + \dfrac{\pi}{2\delta r_i} \operatorname{sen} \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \left(\lg \dfrac{k}{r_i} - 2 \right) \right]}{\sum_{1}^{\mu}{}_i \cos \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \lg \dfrac{k}{r_i}} & per \ n = 2 \\[4ex] \dfrac{\sum_{1}^{\mu}{}_i \left[\dfrac{\pi^2}{4\delta^2 r_i^{n-2}} \operatorname{sen}\left(\varepsilon + \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \right) + (n-3) \dfrac{\pi}{2\delta r_i^{n-1}} \cos\left(\varepsilon + \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \right) \right]}{\sum_{1}^{\mu}{}_i \dfrac{1}{r_i^{n-2}} \operatorname{sen}\left(\varepsilon + \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \right)} & per \ n > 2, \end{array} \right.$$

allora è $u(P) \equiv 0$.

Per la dimostrazione non v'è che da ripetere il ragionamento di PICONE, prendendo

$$\omega(P) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{1}^{\mu}{}_i \cos \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \lg \dfrac{k}{r_i} & per \quad n = 2 \\[3ex] \sum_{1}^{\mu}{}_i \dfrac{1}{r_i^{n-2}} \operatorname{sen}\left(\varepsilon + \dfrac{\pi r_i}{2\delta} \right) & per \quad n > 2. \end{array} \right.$$

Questo risultato comprende come caso particolare uno di M. BRELOT; questi ha provato ([4]) la proposizione precedente nel caso di $n = 2$ e $C(P)$ continua e < 0.

([4]) M. BRELOT, *Sur l'équation* $\Delta u = c(x, y) u(x, y)$, $c > 0$, *quand* $c(x, y)$ *admet des points singuliers; et une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. 55 (1931), 21-49.