A. De Castro

Soluzioni periodiche di una equazione diffferenziale del secondo ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 26–29.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_26_0>

Soluzioni periodiche di una equazione differenziale del secondo ordine.

Nota di A. De Castro (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra sotto opportune ipotesi l'esistenza di almeno una soluzione periodica per l'equazione differenziale* $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$.

1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1.1}$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -f(x, v)v - g(x) \tag{1.2}$$

dove $f(x, v)$ e $g(x)$ sono funzioni continue e lipschitziane in ogni dominio limitato, e dimostriamo che (1.2) ha almeno una soluzione periodica se si verificano le condizioni seguenti:

i) $f(0, 0) < 0$;
ii) $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$:
iii) per $|x| > x_0$ è $|g(x)| + f(x, v)|v| > \varepsilon > 0$;
iv) infine è verificata una almeno delle seguenti condizioni

a) esiste un numero $R > 0$, tale che è

$$f(x, v) + f(x, -v) \geq 0 \quad \text{per} \quad |x| + |v| \geq R;$$

b) esistono due numeri a, b, $b \geq a > 0$ tali che è

$$f(x, v) + f(x, -v) \geq 0 \quad \text{per} \quad |x| \geq a \text{ e per qualunque } v,$$

$$\int_{-a}^{b} f(x, v)dx \geq \alpha > 0$$

per qualunque funzione $v(x)$, $v(x) > N$ (N arbitrariamente grande).

Posto

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$$

consideriamo l'energia associata al moto rappresentato da (1.1), cioè la funzione

$$u(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(x);$$

sarà

$$\frac{du}{dt} = v\dot{v} + g(x)v = -v^2 f(x, v)$$

perciò $u(x, v)$ è una funzione di t crescente se x, v appartengono a un intorno di $(0, 0)$ abbastanza piccolo, e nessuna integrale di (1.2) passa per $(0, 0)$ quando t cresce. Dimostriamo che, preso un punto iniziale (b, v_1) convenientemente, la corrispondente curva integrale di (1.1), che come è noto ha la forma di spirale, si avvicina a $(0, 0)$. E dopo questo è sufficiente applicare il teorema di BENDIXSON per concludere la dimostrazione.

2. Cominciamo con il caso a). Innanzitutto è evidente che qualunque sia il numero R si può ottenere per scelta conveniente di v_1 un arco in forma di spirale tale che sia in un giro $|x| + |v| > R$. Ciò premesso, l'equazione differenziale delle caratteristiche è

$$\frac{dv}{dx} = -f(x, v) - \frac{g(x)}{v}; \tag{2.1}$$

è evidente che se fosse

$$f(x, v) + f(x, -v) = 0$$

le curve integrali dalla (2.1) sarebbero simmetriche rispetto all'asse $0X$.

Essendo

$$f(x, v) + f(x, -v) \geq 0,$$

per due punti dello stesso arco di una curva integrale, P e P' $(x_P = x_{P'},\ v_P > 0,\ v_P = -v_{P'},\ |x_P| + v_P > R)$ sarà

$$dv_P = -\left[f(x_P, v_P) + \frac{g(x_P)}{v_P}\right] dx_P$$

$$dv_{P'} = -\left[f(x_P, v_{P'}) + \frac{g(x_{P'})}{v_{P'}}\right] dx_{P'}$$

e pertanto per $x_P > 0$, $dx_P < 0$, $dx_{P'} > 0$ sarà

$$dv_P \geq |dv_{P'}|$$

e per $x_P < 0$, $dx_P > 0$, $dx_{P'} < 0$ sarà

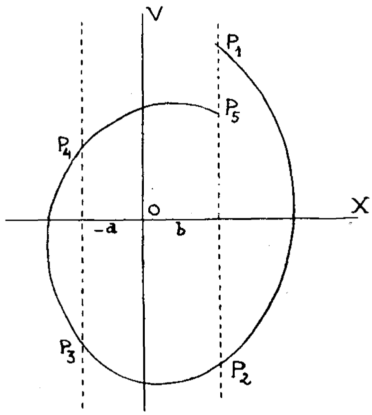
$$dv_P \leq |dv_{P'}|$$

e perciò la forma della curva integrale sarà quella prima dichiarata.

Abbiamo così dimostrato il teorema nel caso a).

3. Nel caso *b*) è anzitutto evidente che qualunque sia il numero N si può scegliere v_1 così grande che la corrispondente curva integrale abbia maggiori di N i valori assoluti delle ordinate dei punti di ascissa x, $-a \leq x \leq b$.

Ciò premesso, consideriamo la curva integrale $P_1P_2P_3P_4P_5$ (vedi figura) sia $P_i = (b, v_i)$, $i = 1, 2, 5$; $P_i = (-a, v_i)$, $i = 3, 4$, e dimostriamo che, preso convenientemente il punto iniziale P_1 (b, v_1) per la corrispondente curva integrale è $v_5 < v_1$.



Come sopra si dimostra che si ha

$$|v_2| - v_1 \leq 0 \tag{3.1}$$

$$v_4 - |v_3| \leq 0. \tag{3.2}$$

Integrando la (2.1) fra P_2 e P_3 si ottiene

$$r_3 - v_2 = -\int_b^{-a} f(x, v)dx - \int_b^{-a} \frac{g(x)}{v}\, dx$$

da cui

$$|v_3| - |v_2| = \int_b^{-a} f(x, v)dx + \int_b^{-a} \frac{g(x)}{v}\, dx$$

$$\leq -\alpha + \int_0^b \frac{g(x)}{|v|}\, dx$$

$$\leq -\alpha + \frac{G(b)}{N}. \tag{3.3}$$

In P_4P_5 si ha come sopra

$$v_5 - v_4 = -\int_{-a}^{b} f(x, v)dx - \int_{-a}^{b} \frac{g(x)}{v}\,dx$$

$$\leq -\alpha - \int_{-a}^{0} \frac{g(x)}{v}\,dx$$

$$< -\alpha + \frac{G(-a)}{N}. \tag{3.4}$$

Sommando le (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) si ha

$$v_5 - v_1 \leq -2\alpha + \frac{G(b) - G(-a)}{N};$$

perciò basta che sia

$$N > \frac{G(b) - G(-a)}{2\alpha},$$

perchè il teorema sia dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

A. V. DRAGILEV, *Soluzioni periodiche della equazione differenziale delle oscillazioni non-lineari*, « Prikl. Mat. Meh. », XVI-I, 1952, pagg. 85-88.

A. DE CASTRO, *Sobre la ecuaciòn diferencial general de las oscilaciones de relajación*, « Rev. Mat. Hisp.-Amer. », XII, 1952.