Bollettino Unione Matematica Italiana

Fabio Conforto

Un'osservazione sopra le superficie abeliane impure di determinante primo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 2–6.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_2_0>

Un'osservazione sopra le superficie abeliane impure di determinante primo.

Nota di FABIO CONFORTO (a Roma).

Sunto. - *Si dimostra che esiste un solo tipo di superficie abeliane impure, il cui determinante sia un numero primo dispari. Si aggiunge un semplice esempio, sul quale si prova come inesatta la presunzione che, se per una matrice di* RIEMANN *di genere due è soddisfatta una relazione singolare, esistono per tale matrice relazioni singolari di qualsivoglia divisore.*

1. CONCETTA BONOMI ha sviluppato, in una memoria che risale al 1918 (1), un metodo per la costruzione di tutte le superficie abeliane di rango uno (superficie iperellittiche), che sono impure e di *determinante* dato d, che contengono cioè due fasci ellittici di curve ellittiche in modo che le curve di uno dei due fasci intersechino in d punti le curve dell'altro fascio.

Quando, in particolare, il determinante d sia un numero primo

(1) C. BONOMI, *Le superficie iperellittiche con fasci ellittici di curve ellittiche*, « Rend Circ. Mat. di Palermo », *43*, 1918-19, pp. 47-70.

(dispari) p, C. BONOMI trova che la matrice di RIEMANN delle superficie in questione è (equivalente nel senso di SCORZA ad) una matrice di RIEMANN del tipo:

$$\omega = \begin{Vmatrix} 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r}{p} & 1 & \tau \end{Vmatrix} \tag{1.1}$$

essendo $\|1\ \sigma\|$, $\|1\ \tau\|$ matrici di periodi di due corpi di funzioni ellittiche qualsiasi ed $1 \leq r \leq \frac{p-1}{2}$. A questo punto, C. BONOMI dimostra con un ragionamento perfettamente corretto che la matrice di RIEMANN data dalla (1.1) e la matrice di RIEMANN:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s}{p} & 1 & \tau \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

con $s \neq r$ $\left(1 \leq s \leq \frac{p-1}{2}\right)$ non sono mai equivalenti tra loro per σ e τ generici; e da qui deduce che *le superficie iperellittiche impure di determinante* p (con p numero primo dispari) *si dividono in* $\frac{\mathrm{p}-1}{2}$ *tipi distinti.*

Nel corso di ricerche, tendenti ad approfondire lo studio delle matrici di RIEMANN singolari non più dal punto di vista dell'isomorfismo, come quasi esclusivamente si è fatto sinora, ma da quello dell'equivalenza [2], ho avuto occasione di osservare che quest'ultima conclusione è *illegittima* e che in realtà *esiste un unico tipo di superficie iperellittiche impure di determinante primo dispari* p.

La ragione di tale fatto sta in ciò. È bensì vero che, *per valori determinati* (ma generici) *di* σ *e* τ, la matrice (1.2) non è mai equivalente alla (1.1) per $r \neq s$. Ma è altresì vero che la (1.1) è equivalente ad una matrice del tipo (1.2) quando in questa σ e τ

[2] Ricerche di tale natura si presentano come necessarie nella nuova teoria delle funzioni abeliane modulari; cfr. il mio volume: *Funzioni abeliane modulari,* Vol. I, « Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica », Docet Edizioni Universitarie, Roma, 1952, cap. III, nn. 3-5 ed il n. 10 dei complementi storici e bibliografici. Cfr. anche il n. 6 della relazione *Problèmes résolus et non résolus de la théorie des fonctions abéliennes dans ses rapports avec la géométrie algébrique,* da me presentata al Deuxième Colloque de Géométrie Algébrique tenuto a Liegi dal 9 al 12 giugno 1952 per iniziativa del Centre belge de Recherches mathématiques.

siano sostituiti da opportuni σ' e τ', funzioni di σ e τ. Ne consegue che *la famiglia delle superficie iperellittiche rispondenti alla* (1.1), *al variare in essa di σ e τ, s'identifica con la famiglia delle superficie iperellittiche rispondenti alla* (1.2), *al variare in essa di σ e τ*. Si ottengono perciò già *tutte* le superficie del determinante p, considerando le superficie rispondenti alla tabella (1.1), quando si faccia in essa ad es. $r=1$; e vi è dunque un sol tipo per le superficie in discorso.

2. Per dimostrare l'asserto, scelti comunque r, s con $r \neq s$ ed $1 \leq r \leq \frac{p-1}{2}$, $1 \leq s \leq \frac{p-1}{2}$, si osservi che, per essere p primo, le coppie s, p ed r, p sono coppie di numeri primi tra loro. Si possono pertanto trovare quattro numeri interi: α_{11}, α_{12}, α_{34}, α_{44} in modo che:

$$s\alpha_{11} - p\alpha_{12} = 1, \qquad r\alpha_{44} - p\alpha_{34} = 1.$$

La matrice:

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ p & s & 0 & 0 \\ -r & 0 & r & \alpha_{34} \\ 0 & s & p & \alpha_{44} \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

riesce allora unimodulare (ed anzi addirittura modulare).

Inoltre, per essere $\|1\ \sigma\|$, $\|1\ \tau\|$ matrici di Riemann di genere uno, è:

$$\alpha_{11} + p\sigma \neq 0, \qquad r + p\tau \neq 0$$

onde si può considerare la matrice:

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\alpha_{11} + p\sigma} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r + p\tau} \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

che sarà non degenere.

Ciò posto, è immediato che la matrice $\alpha\omega A$, ove la ω è data dalla (1.1), la A dalla (2.1) e la α dalla (2.2), è equivalente alla (1.1) ed è del tipo:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \sigma' & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s}{p} & 1 & \tau' \end{Vmatrix}$$

con:

$$\sigma' = \frac{s\sigma + \alpha_{12}}{p\sigma + \alpha_{11}}, \qquad \tau' = \frac{\alpha_{44}\tau + \alpha_{34}}{p\tau + r}$$

cioè del tipo (1.2) pur di sostituire in questa σ e τ rispettivamente con σ' e τ'. E si può in più osservare che σ' è legato a σ e τ' a τ da sostituzioni modulari.

3. Aggiungo un'ulteriore osservazione. Una matrice riemanniana alternata della (1.1), cioè una matrice emisimmetrica $M = \| m_{hk} \|$ ad elementi interi (primi tra loro) per la quale sia $\omega M \omega_{-1} = 0$, implica per la (1.1) l'esistenza di una relazione singolare, che si scrive:

$$m_{12}\frac{r}{p} + m_{13} + m_{14}\tau + m_{23}\sigma + m_{24}\sigma\tau = 0, \tag{3.1}$$

donde, *se σ e τ sono generici*, si trae:

$m_{12} = \lambda p, \quad m_{13} = -\lambda r, \quad m_{14} = m_{23} = m_{24} = 0 \quad (\lambda$ intero qualunque),

e quindi:

$$M = \left\| \begin{matrix} 0 & \lambda p & -\lambda r & 0 \\ -\lambda p & 0 & 0 & 0 \\ \lambda r & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \end{matrix} \right\| \tag{3.2}$$

donde, ora λ e μ possono essere due interi qualunque primi tra loro, al variare dei quali la (3.2) dà tutte le matrici alternate della (1.1).

Il divisore δ della M data dalla (3.2), che si dice anche il divisore della relazione singolare (3.1), è dato dal valore assoluto del pfaffiano del determinante di M [3], onde è:

$$\delta = p \, |\lambda\mu| \, .$$

Si vede così che δ è, nel caso della matrice (1.1), necessariamente un multiplo di p, onde resta provata come inesatta, su questo semplice esempio, la presunzione, espressa da G. Cotty [4],

[3] Tenuto conto che la M è ad elementi interi primi tra loro ed emisimmetrica, dei quattro divisori elementari che ad essa appartengono i primi due valgono 1, mentre gli ultimi due saranno del tipo δ e δ^2. Ma δ^2 è allora il valore del determinante di M, onde δ è il valore assoluto del pfaffiano di tale determinante. È questo δ che nel testo è chiamato semplicemente « il divisore » della M.

[4] Al n. 4 del § 1 del cap. III della sua bella memoria: *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres*, « Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse », (3), *3*, 1911, pp. 209-376.

che se per una matrice di RIEMANN di genere 2 è soddisfatta una relazione singolare, esistono per tale matrice relazioni singolari di qualsivoglia divisore. Ciò rende più interessanti le ricerche sul modo di distribuirsi dei divisori delle relazioni singolari di una data matrice di RIEMANN.