Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Osservazioni sulle trasformazioni puntuali analitiche fra spazi euclidei.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 40–43.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_40_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Osservazioni sulle trasformazioni puntuali analitiche fra spazi euclidei.

Nota di Luigi Muracchini (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostrano due proposizioni che caratterizzano le similitudini fra le trasformazioni puntuali analitiche tra spazi euclidei.*

1. Il Villa ha segnalato l'interesse che presentano le caratterizzazioni di trasformazioni puntuali anche nel campo metrico (1).

(2) Ci limitiamo solo a notare che, qualora si cercasse un principio variazionale partendo dalla (18) attraverso il principio variazionale ad essa relativo, si giungerebbe, tramite la (7), alla stazionarietà di

$$\int_\sigma (v_x^2 + v_y^2 - \omega^2\eta)\, d\sigma$$

sul pelo libero; a parte il fatto che non si vede un significato fisico evidente, resta l'altro che, per le ipotesi fatte, tutta la funzione integranda va considerata di ordine di grandezza trascurabile.

(1) M. Villa, *Ricerca di particolari tipi di trasformazioni pnntuali e cremoniane*, III Oesterreichischer Mathematiker Kongress, Salzburg, 1952.

Lo studio *locale* delle trasformazioni fra spazi euclidei S_3 trovasi in: J. Creanga, *Sulla trasformazione degli intorni del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei*, « Rend. di Mat. e sue Appl. Roma », (5) 1, pp. 177-227, (1940). In Villa, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Note I, II, III, « Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. », (8) 4, pp. 55-61, 192-196, 295-303, (1948), trovansi osservazioni sulle trasformazioni fra S_r euclidei. Si veda anche : E. Bompiani, op. cit. in (4).

Qui espongo due proposizioni assai semplici che non mi consta siano state esplicitatamente enunciate e dimostrate elementarmente.

Si tratta delle due proposizioni seguenti:

(*a*) *Una trasformazione puntuale analitica fra piani euclidei che sia conforme e conservi le aree è una similitudine.*

(b) *Una trasformazione puntuale analitica fra spazi euclidei che conservi le aree è una similitudine* ([2]).

2. Dimostriamo la proposizione (*a*). Siano

$$\bar{x} = \bar{x}(x,\ y), \qquad \bar{y} = \bar{y}(x,\ y)$$

le equazioni, in coordinate cartesiane ortogonali, di una trasformazione T tra due piani euclidei. Indicheremo, come si fa di solito, con p, q, r, s, t le derivate parziali prime e seconde della funzione $\bar{x}\,(x, y)$ e con p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, le analoghe derivate della $\bar{y}(x, y)$.

La T è conforme se, e solo se,

$$p = q_1, \qquad q = -p_1\,; \tag{1}$$

conserva le aree se, e solo se,

$$pq_1 - qp_1 = k^2 \qquad (k \text{ costante} \neq 0) \tag{2}$$

Si tratta di integrare il sistema (1), (2) di equazioni alle derivate parziali. Sostituendo le (1) in (2) si ha intanto

$$p^2 + q^2 = k^2, \tag{3}$$

e poi dalle (1), per derivazione e confronto, si ha

$$s_1 = r = -t$$

cioè

$$r + t = 0. \tag{4}$$

Ma derivando la (3) si ha:

$$ps = -qt, \qquad qs = -pr\,;$$

se ne trae

$$(p^2 + q^2)s = 0$$

e quindi, per la (3), $s = 0$. Si conclude che

$$\bar{x}(x,\ y) = f(x) + g(y)$$

con

$$f'^2 + g'^2 = k^2.$$

([2]) Mi porrò, in quanto segue nel campo reale. Ma le proposizioni valgono anche nel campo complesso come si potrà constatare senza difficoltà.

Si deve dunque avere:

$$f' = k \cos \alpha, \qquad g' = \pm k \operatorname{sen} \alpha$$

dove α è un angolo costante arbitrario. Infine si ha

$$\begin{aligned} \bar{x}(x, y) &= k(x \cos \alpha \pm y \operatorname{sen} \alpha) + a \\ \bar{y}(x, y) &= k(\mp x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha) + b. \end{aligned} \qquad (a,\ b \text{ cost. arbitrarie}) \cdot$$

La proposizione (a) è così dimostrata.

3. Dimostriamo ora la proposizione (b). Siano

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y, z), \qquad \bar{y} = \bar{y}(x, y, z), \qquad \bar{z} = \bar{z}(x, y, z)$$

le equazioni di una trasformazione T, analitica, fra due spazi S_3 euclidei, in coordinate cartesiane ortogonali. Sia

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial y} & \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y} & \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z} \end{vmatrix},$$

lo jacobiano di T, supposto diverso da zero in tutti i punti delle regioni che si considerano. Indichiamo con $\left[\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right]$ il complemento algebrico dell'elemento $\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x}$ in J e analogamente per gli altri elementi; indichiamo con M_x la matrice formata con le due ultime righe di J, con M_y ed M_z le altre due analoghe matrici,

Semplici calcoli permettono allora di verificare che, affinchè T conservi le aree [3], occorre e basta che siano verificate le condizioni

$$M_x^2 = M_y^2 = M_z^2 = k^4 \tag{5}$$

$$M_x M_y = M_y M_z = M_z M_x = 0. \tag{6}$$

[3] Basta imporre che elementi d'area corrispondenti siano in un rapporto costante k^2.

Ma le condizioni (5), (6) comportano l'ortogonalità del determinante

$$\Delta \cdot k^{-6} = \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right] : k^2 & \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}\right] : k^2 & \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}\right] : k^2 \\ \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right] : k^2 & \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right] : k^2 & \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial z}\right] : k^2 \\ \left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right] : k^2 & \left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right] : k^2 & \left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right] : k^2 \end{vmatrix},$$

Se ne trae che anche $\pm J \cdot k^{-3}$ è ortogonale e si conclude quindi che la trasformazione T è conforme e conserva i volumi. Ma le uniche trasformazioni conformi dello spazio sono (essenzialmente) le similitudini e le inversioni [4]. La proposizione (*b*) segue allora subito se si osserva che nessuna inversione spaziale conserva i volumi e quest'ultima affermazione segue da un risultato che ho stabilito in altro lavoro [5]. Essa può anche verificarsi direttamente senza difficoltà.