Giovanni Mulè

Su un criterio di convergenza uniforme.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 43–44.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_43_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Su un criterio di convergenza uniforme.

Nota di GIOVANNI MULÈ (a Genova).

Sunto. - *Si stabilisce una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme di una successione di funzioni reali di variabile reale in un insieme qualunque* [1]. *Come applicazione si ritrova la seconda parte, cioè quella riguardante la sufficienza, di un teorema del Prof.* PICONE [2].

1. Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

Se $\{f_n(x)\}$ *è una successione di arbitrarie funzioni reali della variabile reale* x, *definite in un qualsivoglia insieme* I, *condizione necessaria e sufficiente affinchè essa converga uniformemente in* I

[4] Vedasi ad es.: E. BOMPIANI, *Caratteri differenziali della trasformazione conforme*, « Rend. di Mat. e sue appl. Roma », (5), 3, pp. 138-151, (1942).

[5] L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni cremoniane che conservano le aree od i volumi*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 7, pp. 388-392 (1952).

[1] La dimostrazione di tale teorema rimane immutata ove si consideri una successione di funzioni definite in un insieme di un qualsiasi spazio di HAUSDORFF e che facciano corrispondere ad ogni elemento x di tale insieme un elemento di uno spazio metrico qualsivoglia.

[2] M. PICONE, Su *un criterio del Dini di convergenza uniforme*, « Boll. U.M.I. », Serie III, Anno VII, 1952, pag. 106.

verso una funzione f(x), *è che ogni sua sottosuccessione ne contenga un' altra uniformemente convergente in* I.

Che la condizione sia necessaria è ovvio.

Per dimostrarne la sufficienza basterà far vedere che, se la $\{f_n(x)\}$ non converge uniformemente in I, è possibile trovare una sua sottosuccessione tale che tutte le successioni in essa contenute non convergano uniformemente in I. A tale scopo consideriamo l'estremo superiore L_n $(n = 1, 2, ...)$ della funzione $|f_n(x) - f(x)|$ in I e osserviamo che, per quanto supposto, dovrà essere

$$\max\lim_{n \to \infty} L_n = \lambda > 0.$$

Esisterà allora una successione crescente di indici $\{n_i\}$ tale che risulti

$$\lim_{i \to \infty} L_{n_i} = \lambda > 0,$$

da cui segue

$$\lim_{j \to \infty} L_{r_j} = \lambda > 0, \tag{1}$$

essendo $\{r_j\}$ una qualsiasi sottosuccessione della $\{n_i\}$.

Dalla (1) si deduce che la $\{f_{n_i}(x)\}$ non contiene alcuna sottosuccessione convergente uniformemente in I e ciò dimostra appunto la nostra asserzione.

2. È noto [3] che la convergenza della $\{f_n(x)\}$ in I verso la $f(x)$ è certamente uniforme qualora siano soddisfatte le seguenti ipotesi;

a) I sia chiuso e limitato [4],

b) le funzioni $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ siano semicontinue superiormente in I,

c) la successione $\{\varphi_n(x)\}$ sia non crescente in ogni punto di I.

Il teorema dimostrato al n. 1 ci assicura allora che quest'ultimo criterio conserva la sua validità qualora l'ipotesi *c*) venga sostituita con la seguente:

c') ogni sottosuccessione della $\{\varphi_n(x)\}$ ne contenga un'altra non crescente in ogni punto di I.

Ritroviamo così un criterio contenuto nella seconda parte — quella riguardante la sufficienza — di un teorema del Prof. PICONE [5].

(3) Vedasi: CARATHÉODORY, *Reelle Funktionen*, Band I, pag. 168. Ed. Teubner, 1939.

(4) Nel caso indicato in (1) bisognerà prendere I chiuso e compatto.

(5) Loc. cit. in (2).