Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle trasformazioni di contatto algebriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.1, p. 6–9.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_1_6_0>

Sulle trasformazioni di contatto algebriche.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna).

Sunto. - *Si osserva che una trasformazione di contatto algebrica fra due piani è individuata da una reciprocità fra due sistemi lineari di curve algebriche (aventi la stessa dimensione) e si assegna la costruzione della trasformazione a partire da una data reciprocità fra due dati sistemi lineari.*

1. Il compianto prof. GINO FANO, recentemente scomparso, si è occupato in alcuni pregevoli lavori delle trasformazioni di contatto algebriche (¹).

Uno dei primi a studiare trasformazioni di contatto algebriche fu l'AUTONNE (²); ultimamente furono studiate da O. H. KELLER (³).

Com'è ben noto, una trasformazione di contatto fra gli elementi E_1 di due piani (x, y) e $(\bar{x}, \bar{y})$ è rappresentata dalle equazioni

$$\bar{x} = X(x, y, p), \quad \bar{y} = Y(x, y, p), \quad \bar{p} = P(x, y, p),$$

(¹) G. FANO, *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », Ser. VI, vol. VIII, p. 445 (1928); *Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », Ser. VI, vol. VIII, p. 529 (1928); *Congruenze Ω_0 di curve razionali, e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare*, Rend. dell'Accademia dei Lincei, Ser. VI, vol. VIII, p. 623 (1928); *Un esempio di trasformazione birazionale cubica inerente a un complesso lineare*, Rend. dell'Accademia dei Lincei, Ser. VI, vol. IX, p. 16 (1929); *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*, Atti del Congresso Inter. dei Matematici a Bologna, 1928, vol. IV, p. 35; *Le trasformazioni birazionali di contatto del piano*, « Commentarii Mathematici Helvetici », vol. XX, p. 181 (1947).

(²) L. AUTONNE, *Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact*, « Journal de Mathématiques pures et appliquées », Ser. IV, vol. III, p. 63 (1887); *Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien*, « Journal de Mathématiques pures et appliquèes », Ser. IV, vol. IV, p. 117 e p. 407 (1888); *Sur les formes mixtes*, « Annales de l'Univ. de Lyon, Sciences et Médec. », vol. 16 (1905).

(³) O. H. KELLER, *Zur Theorie der ebenen Berührungstransformationen*, « Math. Ann. », vol. 120, p. 650 (1949); *Zur Theorie der ebenen, algebraischen Berührungstransformationen*, « Math. Ann. », vol. 121, p. 467 (1950).

dove $dY - PdX = \rho(dy - pdx)$; p, $\bar{p}$ sono i coefficienti direttivi delle direzioni degli E_1 dei due piani e X, Y, P, ρ sono funzioni di x, y, p.

Dalle precedenti relazioni, com'è notissimo, si possono ricavare una oppure due relazioni non contenenti nè p, nè $\bar{p}$. Il caso di due equazioni porta alle trasformazioni puntuali ordinarie intese come trasformazioni fra gli E_1. L'altro caso, in cui vi è un'equazione sola, alle trasformazioni di contatto vere e proprie. L'equazione in discorso

$$F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = 0$$

è chiamata dal PLÜCKER « equazione direttrice ».

Un'equazione di questo tipo individua a sua volta la trasformazione di contatto [4]. La trasformazione di contatto è algebrica quando F è un polinomio in x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, sicché la $F = 0$ rappresenta un connesso algebrico.

Si ha quindi:

Un connesso algebrico fra due piani individua una trasformazione di contatto algebrica fra i due piani e inversamente.

2. Ora, nel 1934, io ho dedicato una Memoria ai connessi algebrici e iperalgebrici fra due spazi lineari [5]. Limitiamoci, per fissare le idee, al caso dei connessi fra due piani e al caso algebrico che è quello che qui interessa. L'idea che domina in tale mio lavoro è la seguente: nel connesso $F = 0$ ai punti di un piano corrispondono curve algebriche costituenti un sistema algebrico ∞^2; orbene io ho considerato in ciascuno dei piani il sistema lineare di dimensione minima contenente le curve del sistema algebrico. Ho dimostrato che *i due sistemi lineari Σ_1 e Σ_2 (sistemi*

(4) Affinché la $F = 0$ dia luogo ad una trasformazione di contatto dev'essere

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \bar{x}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \bar{x}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial \bar{x}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \bar{y}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \bar{y}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial \bar{y}} \end{vmatrix} \neq 0$$

nella coppia generica di punti corrispondenti nel connesso.

(5) M. VILLA, *Connessi algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima*, « Memorie dell'Accademia d'Italia », vol. VI, p. 151 (1934). Questa Memoria è rivolta principalmente ai connessi iperalgebrici involutori che determinano le varietà iperalgebriche di dimensione massima.

Sui connessi algebrici è apparsa recentemente una Memoria di F. SEVERI, *Fondamenti per una teoria generale dei connessi*, « Acta Salmanticensia, Publicaciones de la Universidad de Salamanca », (1950).

associati) hanno la stessa dimensione e che il connesso determina fra Σ_1, Σ_2 una reciprocità R. Facendo corrispondere ad ogni curva C di uno dei sistemi associati, il sistema lineare minimo contenente il sistema algebrico formato dalle curve corrispondenti nel connesso ai punti di C, nasce appunto una reciprocità R.

E inversamente: una reciprocità R fra due sistemi lineari Σ_1 e Σ_2 (aventi la stessa dimensione δ) determina un connesso algebrico. Basta far corrispondere ad un punto A di un piano la curva corrispondente nella reciprocità R al sistema lineare delle curve di Σ_1 passanti per A.

Dal punto di vista analitico si ha che un polinomio

$$F(x, y; \bar{x}, \bar{y})$$

nelle variabili x, y e $\bar{x}$, $\bar{y}$ si può sempre scrivere in infiniti modi sotto la forma *(canonica)*

$$\sum_i u_i v_i ,$$

dove gli u sono polinomi linearmente indipendenti nelle x y e i v sono polinomi linearmente indipendenti nelle $\bar{x}$, $\bar{y}$, ma sempre in quest'espressione il numero $\delta + 1$ dei termini è fisso ([6]).

La dimensione δ di Σ_1, Σ_2, che ho chiamato *genere* del connesso, è un invariante birazionale del connesso.

Ora, ritornando alle trasformazioni di contatto, siccome una trasformazione di contatto (algebrica) individua un connesso (e inversamente ([7])), si ha:

Una trasformazione di contatto algebrica individua nei due piani due sistemi lineari di curve della stessa dimensione e una reciprocità fra essi (e inversamente).

Questa osservazione trovasi già in una mia comunicazione al II° Congresso della Società Matematica Austriaca (Innsbruck, 1949), dedicata appunto fra l'altro alle trasformazioni algebriche di contatto.

3. Ma ora ecco come dati nei due piani π_1, π_2 due sistemi lineari Σ_1, Σ_2 di curve piane (aventi la stessa dimensione δ) e una reciprocità R fra essi, si costruisce la trasformazione di contatto T fra π_1, π_2 individuata da tali elementi.

([6]) Da questi risultati segue una *legge d'inerzia* per le forme iperalgebriche reali (Cfr. M. VILLA, op. cit.).

([7]) Se il connesso $F = 0$ è di genere 1 non individua però una trasformazione di contatto in quanto il determinante della nota ([4]) è identicamente nullo. Infatti l'equazione di un connesso di genere 1 può scriversi $u_1 v_1 + u_1 v_2 = 0$ (dove u_1, u_2 sono polinomi in x, y e v_1, v_2 polinomi in $\bar{x}$, $\bar{y}$) od anche $f(x, y) + \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ $\left(\text{avendo posto } f = \frac{u_1}{u_2}, \ \varphi = \frac{v_2}{v_1}\right)$. Sicchè $F \equiv f(x, y) + \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ annulla identicamente il determinante della nota ([4]). Del resto: gli E_1 delle curve di un fascio sono ∞^2, mentre gli E_1 di un piano sono ∞^3. Nel seguito si supporrà quindi $\delta > 1$.

Dato in π_1 *un* E_1 *di centro* P *(generico rispetto ai dati), si consideri*:

1) *il sistema* $\infty^{\delta-1}$ *formato dalle curve di* Σ_1 *passanti per* P *e la curva* C *corrispondente a questo sistema nella reciprocità* R*;*

2) *il sistema* $\infty^{\delta-2}$ *formato dalle curve di* Σ_1 *contenenti l'* E_1 *e il fascio* F *corrispondente a questo sistema in* R*;*

3) *il sistema* $\infty^{\delta-3}$ *costituito dalle curve di* Σ_1 *aventi punto doppio (almeno) in* P *e la rete* Δ *corrispondente a questo sistema in* R (8)*;*

la curva C *sta in* F *e* F *sta in* Δ.

Orbene, gli E_1 *corrispondenti al dato* E_1 *nella trasformazione di contatto* T *sono gli* E_1 *della curva* C *aventi per centro i punti base di* F *che non sono punti base di* Δ.

Infatti nel connesso Γ (individuato da Σ_1, Σ_2, R) al punto P (centro dell'E_1) corrisponde la curva C. E gli E_1 corrispondenti al dato E_1 sono quelli appartenenti a C e aventi per centro i punti semplici di C appartenenti alla curva C_1 corrispondente in Γ al punto infinitamente vicino a P sul dato E_1, esclusi i punti caratteristici principali di C, cioè i punti semplici di C comuni a tutte le curve C_2 corrispondenti in Γ ai punti infinitamente vicini a P. Ora la curva C_1 appartiene al fascio F e le curve C_2 appartengono alla rete Δ in quanto, per $\delta > 2$, questa rete corrisponde in R al sistema $\infty^{\delta-3}$ costituito dalle curve di Σ_1 aventi punto doppio in P, cioè contenenti ogni E_1 di centro P.

Si noti poi che i punti multipli di C (variabili con C) appartengono anche a tutte le curve C_2 e quindi sono punti base di F e di Δ.

Siccome gli E_1 corrispondenti al dato E_1 hanno per centri i punti semplici di C comuni a C_1 ma non a tutte le curve C_2, si conclude appunto che tali centri sono i punti base di F che non lo sono per Δ. L'asserto è così dimostrato.

4. Va rilevata la grande semplicità della precedente costruzione. È chiaro come dal risultato del n. 3 nasca una nuova impostazione per lo studio delle trasformazioni di contatto algebriche la quale potrà portare a risultati interessanti anche beninteso per le trasformazioni algebriche di contatto biunivoche.

Si ha una trasformazione di questo tipo quando il punto base di F che non è punto base di Δ è unico.

Per cominciare bisognerebbe determinare le condizioni a cui devono soddisfare i sistemi Σ_1 e Σ_2 perchè la corrispondente trasformazione di contatto sia biunivoca. In altri termini determinare le condizioni a cui soddisfa il sistema lineare minimo contenente un sistema algebrico omaloidico secondo FANO (9).

(8) Se $\delta = 2$ è $\Delta \equiv \Sigma_2$.

(9) FANO, l'ultima delle op. cit., p. 184.