Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gaetano Fichera

A proposito delle mie Note "Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme".

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 109–114.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

A proposito delle mie Note "Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme" (1).

Nota(*) di GAETANO FICHERA (a Trieste)

Sunto. - *Considerazioni originate da una recensione del Sig.* Z. NEHARI.

Ho letto nel Vol. 13°, n. 10 di Mathematical Reviews, la recensione del Sig. Z. NEHARI alle mie due Note: *Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme.*

Essa dimostra che è stato raggiunto lo scopo al quale io dedicavo quelle mie due Note, cioè il far riconoscere che certi metodi

(1) « Rend. Lincei », Serie VIII, Vol. X, Fasc. 5-6, (1951), pp. 356-364; pp. 452-458.

(*) Il contenuto della presente Nota è stato già comunicato al Sig. Z. NEHARI.

di indagine nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, che adesso, in casi particolari, vengono adoperati da alcune Scuole americane erano in precedenza noti e già con profitto usati da matematici italiani.

È augurabile che dopo tale recensione questo riconoscimento venga fatto anche dagli altri Matematici, che in America coltivano tale indirizzo. Io, purtroppo, non sono riuscito ad ottenere ciò, malgrado i contatti, personalmente avuti, con alcuni di detti Matematici in occasione di miei viaggi negli U. S. A. durante le estati del 1950 e del 1951: i lavori italiani sull'argomento sono rimasti ignorati anche nelle successive pubblicazioni di quei Matematici.

Mi permetto di ribadire ancora la mia opinione secondo la quale la kernel function interviene soltanto formalmente nella dimostrazione di teoremi di esistenza e nei problemi quantitativi per le equazioni differenziali lineari.

Gli strumenti di indagine sono invece ben diversi; essi risiedono nella completezza di assegnati sistemi di funzioni e nel comportamento sulla frontiera delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali lineari, che appartengono a determinati spazi hilbertiani. Il fatto che per le soluzioni di una certa classe si possa scrivere, detto $\{v_k(P)\}$ un sistema ortonormale e completo di soluzioni

$$v(P) = \Sigma_k \int_A v_k(P)\overline{v_k(Q)}v(Q)d_Q\tau\,; \tag{1}$$

oppure:

$$v(P) = \int_A \Sigma_k v_k(P)\overline{v_k(Q)}v(Q)d_Q\tau \tag{2}$$

è una questione la quale non può avere interesse più che formale, laddove sono invece le proprietà di quella classe di soluzioni e del sistema ortonormale completo in essa assunto, che veramente hanno interesse a prescindere dal fatto che la $v(P)$ venga rappresentata con la (2) anzichè con la (1).

Credo sia una prova di ciò la circostanza che, mentre i metodi da me impiegati sussistono anche per problemi non autoaggiunti, il formalismo della kernel function, così come viene concepita dal Bergman, viene a mancare in questo caso più generale.

Nella Sua recensione il Sig. Nehari vuole interpretare un punto esclamativo ed un punto interrogativo da me messi alla fine di un'affermazione dei Sigg. GARABEDIAN e SCHIFFER (²) come un mio dubbio circa il fatto che per una funzione olomorfa nel cerchio $|z|<1$ e ivi di norma integrabile, possa valere la limitazione:

$$|f(z)| \leq \frac{A}{1-|z|}.$$

Mi si permetta di osservare che è questo un banale risultato la cui prova, senza far uso della kernel function, è la seguente:

$$|f(z)|^2 = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\pi} z^k \iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\bar{\zeta}^k d_\zeta\tau\right|^2 \leq$$

$$\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|z|^{2k}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{\pi}\left|\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\bar{\zeta}^k d_\zeta\tau\right|^2 = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-|z|^2)^2}\iint_{|\zeta|<1}|f|^2 d_\zeta\tau\,;$$

$$A = \left(\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}|f|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A questo proposito, all'Autore di un recente libro sulla kernel function vorrei segnalare che per una funzione $F(z)$ olomorfa nel cerchio $|z|<1$ e con derivata prima di norma sommabile sussiste la limitazione:

$$|F(z)-F(0)| \leq B\left(\log\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

che immediatamente si dimostra osservando:

$$|F(z)-F(0)|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi} z^k \iint_{|\zeta|<1} F'(\zeta)\bar{\zeta}^{k-1} d_\zeta\tau\right|^2 \leq$$

$$\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{k}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\pi}\left|\iint_{|\zeta|<1} F'(\zeta)\bar{\zeta}^{k-1} d_\zeta\tau\right|^2 = \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{1-|z|^2}\iint_{|\zeta|<1}|F'|^2 d\tau\,;$$

$$B = \left(\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}|F'|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (³).}$$

I miei punti, esclamativo ed interrogativo, esprimevano invece tutto il mio stupore per il modo di ragionare dei Sigg. GARABE-

(²) Cfr. GARABEDIAN and SCHIFFER, *On Existence Theorems of Potential Theory and Conformal Mapping*, « Annals of Math. », II s.; v. 52; n. 1, July 1950, pp. 164-187.

(³) Cfr. BERGMAN, *The kernel function*, etc. « Amer. Math. Soc. », 1950, Pag. 109.

DIAN e SCHIFFER. Che il Sig. NEHARI corregga il loro errore non sorprende. L'esistenza della funzione di GREEN per il problema di DIRICHLET relativo all'equazione di LAPLACE è nota da quasi un secolo.

Il Sig. NEHARI afferma alla fine della sua recensione che il metodo di GARABEDIAN e SCHIFFER è equivalente al mio. Essi pervengono a dimostrare l'esistenza della funzione di GREEN, ma non di una funzione armonica che assume sul contorno valori prescritti. Egli afferma inoltre che «the solution of the general boundary-value problem is an immediate consequence». A tale proposito gradirei più precisi dettagli; ciò è possibile (4), ma è veramente immediato?

Così pure sarebbe assai interessante per me vedere che per mezzo della kernel function possono dimostrarsi tutti i teoremi di esistenza e di completezza già dimostrati con i metodi da me impiegati e che sono contenuti nei seguenti lavori:

G. FICHERA. *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 1948, serie VIII, vol. V, fasc. 6, pp. 319-324.

G. FICHERA, *Sui problemi analitici dell'elasticità piana*, «Rend. Sem. della Facoltà di Scienze della Università di Cagliari», 1949.

G. FICHERA, *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico. autoaggiunti*, «Ann. Scuola Norm.», Pisa, 1947, s. III, vol. I, fasc. 1-4, pp. 75-100.

G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, «Ann. Scuola Norm.», Pisa, 1950, s. III, vol. IV. fasc. 1-2, pp. 35-100.

G. FICHERA, *One some general integration methods employed in connection with linear differential equations*, «Journ. of Math. and Phy.», 1950, vol. XXIX, n. 2. pp. 59-69.

M. PICONE, G. FICHERA, *Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen*, «Monashefte für Math.», 1950, Band. LIV, Heft. 3, pp. 188-209.

R. B. ANCORA, *Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata*, «Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova» 1951, vol. XX, parte 1ª, pp. 99-134.

G. FICHERA, *Interpretazione ed estensione funzionale di recenti metodi d'integrazione delle equazioni differenziali lineari*, Atti del IV Congresso, dell'Un. Mat. Ital., 1951.

(4) Cfr. la mia Nota *Sui teoremi di esistenza* etc., Teor. IV.

G. FICHERA, *Esistenza del minimo in un classico problema di Calcolo delle variazioni,* « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1951, serie VIII, vol. XI, fasc. 1-2, pp. 34-39.

T. VIOLA, *Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli, connessi con i problemi al contorno per le funzioni iperarmoniche,* « Ann. Scuola Norm. », Pisa, 1952, s. III, Vol. VI, fasc. I-II, pp. 109-145.

E. MAGENES, *Sull'equazione del calore: Teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di* M. PICONE, Nota I e II, « Rend. Sem. Mat. », Padova, 1952, vol. XXI, parte I[a], pp. 99-123; 136-170.

Ciò dovrebbe essere fatto non riesponendo le dimostrazioni contenute in questi lavori e sostituendo alla rappresentazione (1) della soluzione la (2), ciò che è certo possibile ([5]), ma usando procedimenti sostanzialmente nuovi.

Nè a mio avviso si possono trarre indiscutibili motivi per dar credito al metodo della kernel function, impiegato in questioni esistenziali, per il fatto che esso permette di dimostrare l'esistenza della funzione che rappresenta conformemente un campo p-connesso nel piano privato di p segmenti paralleli.

I Teoremi di esistenza di GARABEDIAN e SCHIFFER, contenuti nelle sezioni 4 e 5 del lavoro citato, non credo rappresentino dei contributi veramente nuovi all'analisi esistenziale ed essi sono interni alla teoria stessa della kernel function.

D'altronde nella mia citata Nota « Sulla kernel function », ho mostrato come uno dei teoremi d'esistenza di G. S. (quello della sezione 4) possa essere dimostrato assai semplicemente ([6]). Lo stesso può farsi per l'altro della sezione 5.

Perchè un metodo possa veramente essere considerato efficace, bisogna che con esso si possano risolvere anche problemi nuovi, non riottenere soltanto risultati già classici.

Con i procedimenti da me impiegati io credo di essere riuscito in questo intento, come potrà constatare chi vorrà dare uno sguardo ai lavori che ho elencato.

Si potrà così anche constatare che la difficoltà della dimostrazione di un teorema di esistenza per equazioni lineari non risiede nella possibilità di costruire una soluzione formale del problema, il che può farsi con diversi procedimenti (metodo di WEYL o delle proiezioni, metodo di PICONE o della formula di GREEN,

([5]) Cfr. G FICHERA, Sulla, *kernel function,* « Boll. Un. Mat. Ital. » Marzo 1952, s. III, anno VII. n. 1, pp. 4-15.

([6]) Cfr. n. 2, *c*) della mia Nota.

metodo di TREFFTZ o dello sviluppo in serie di funzioni ortogonali), ma nello studiare le proprietà infinitesimali della soluzione ottenuta. Ciò si rende possibile solo attraverso un raffinato impiego della moderna teoria delle funzioni di variabili reali e della integrazione di LEBESGUE-STIELTJES.

Un ricorso sistematico a tali branche dell'Analisi consentirebbe una più larga messe di risultati ai cultori della Teoria della kernel function.

Ciò si può rilevare in più punti nel libro del BERGMAN (come ho notato nella mia citata Nota «Sulla kernel function») nonchè nei lavori di suoi seguaci. Ad esempio GARABEDIAN e SCHIFFER semplificherebbero moltissimo la loro trattazione al n° 4 col teorema: «Se la funzione misurabile secondo LEBESGUE $f(z)$ definita sulla frontiera $\mathfrak{F}D$ del dominio D è tale che

$$\int_{+\mathfrak{F}D} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = 0$$

per ogni ζ esterno a D. allora la funzione

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathfrak{F}D} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$$

olomorfa in D assume *quasi ovunque* su $\mathfrak{F}D$ i valori $f(z)$».

Tale teorema si consegue con i metodi della moderna teoria dell'integrazione. Esso si generalizza nel seguente: «Se la funzione complessa, additiva ed a variazione finita, definita sugli insiemi boreliani B di $\mathfrak{F}D$: $\alpha(B)$ è tale che:

$$\int_{+\mathfrak{F}D} \frac{z' d\alpha}{z-\zeta} = 0, \qquad \left(z' = \frac{dz}{ds}\right),$$

per ogni ζ esterno a D, allora la funzione $F(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{+\mathfrak{F}D} \frac{z' d\alpha}{z-\zeta}$ olomorfa in D verifica la proprietà di limite:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} F(z) dz = \alpha(C)$$

essendo C un arco di $\mathfrak{F}D$ e C_ρ l'arco parallelo a distanza ρ interno a D».

A mio avviso non si può sperare oggi di andare nel fondo delle questioni esistenziali senza una conoscenza accurata dei metodi più moderni delle variabili reali.

È questo un punto di vista che, mi consenta il Sig. NEHARI di affermarlo, non si poggia esclusivamente sull'autorità della mia parola.