Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Castoldi

Attorno alla teoria delle connessioni. Deduzione autonoma del carattere tensoriale dei sistemi quadrupli di curvatura.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 127–130.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_127_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Attorno alla teoria delle Connessioni. - Deduzione autonoma del carattere tensoriale dei sistemi quadrupli di curvatura.

Nota di Luigi Castoldi (a Genova).

Sunto. - *Si stabilisce un legame tra i sistemi quadrupli di curvatura relativi a due connessioni — di cui una simmetrica e del resto qualunque — in una medesima varietà topologica* X_n, *e se ne deduce autonomamente il carattere tensoriale.*

1. Sia X_n la varietà topologica di n variabili reali x^i ($i=1, 2, \ldots, n$) ed (L) una connessione lineare, di coefficienti $L_{ij}{}^k$, assegnata in X_n.

Il carattere tensoriale del sistema quadruplo

$$(1) \qquad \begin{aligned} L_{ijh}{}^k &= 2(\partial_{[i} L_{j]h}{}^k + L_{[i|l|}{}^k L_{j]h}{}^l) = \\ &= 2\overset{L\,\uparrow}{\nabla}_{[i} L_{j]h}{}^k \end{aligned}$$ [1]

risulta notoriamente dalle formule di commutazione delle derivate seconde tensoriali in (L) di un vettore arbitrario. Mi propongo di ritrovare qui tale risultato con procedimento *autonomo*, cioè indipendente da ogni ente estraneo (qnale il richiamato vettore arbitrario) alla struttura stessa geometrica attribuita ad X_n mediante (L). In tale procedimento sarà dunque fatto solo ricorso ai coefficienti della connessione assegnata o a parametri comunque atti a individuare tali coefficienti.

[1] La scrittura dell'ultimo membro è conforme al simbolismo introdotto da E. Bompiani in *Geometria differenziale*, Roma, p. 90; e *Geometria degli spazi a connessione affine*, « Ann. di Matem. », s. IV, t. XXIV, 1945, p. 257-282. La L sovrapposta al simbolo di derivazione covariante sta ad indicare la connessione rispetto alla quale essa va effettuata; e la freccia diretta verso l'alto sta ad indicare che si opera tale derivazione *come se* l'indice di $L_{jh}{}^k$ in alto fosse indice di controvarianza.

Perverrò allo scopo partendo da una preliminare osservazione e utilizzando alcune formule, per se stesse notevoli, che gioverà stabilire separatamente. A questo compito preparatorio è dedicato il prossimo numero 2.

2. *A*) La accennata osservazione formale consiste in ciò che, se una connessione assegnata ha nulli identicamente in un particolare riferimento tutti i coefficienti, è altresì nullo — non solo, come è ovvio, in quel riferimento, bensì anche in un diverso qualsivoglia — il corrispondente sistema quadruplo (1). In formule, chiamando *nulla nel riferimento adottato* la considerata connessione, e designandone conformemente con $N_{jh}{}^{k}$ i relativi coefficienti, indi denotando con apici gli indici di grandezze relative a un qualsivoglia diverso riferimento, dico che dall'ipotesi

$$N_{jh}{}^{k} = 0, \tag{2}$$

immediatamente implicante in virtù di (1),

$$N_{ijh} = 0, \tag{2'}$$

consegue pure, genericamente,

$$N_{i'j'h'}{}^{k'} = 0. \tag{3}$$

Si ha infatti, in virtù di (2), per formule note e con consuete notazioni:

$$N_{j'h'}{}^{k'} = x^{l}{}_{j'h'} x^{k'}{}_{l} = N_{h'j'}{}^{k'} \tag{4}$$

e quindi

$$\frac{1}{2} N_{i'j'h'}{}^{k'} = x^{l}{}_{[i'j']h'} x^{k'}{}_{l} + x^{l}{}_{h'[j'} x^{k'}{}_{|lp|} x^{p}{}_{i']} + \\ + x^{l}{}_{h'[j'} x^{p'}{}_{|l|} x^{m}{}_{i']p'} x^{k'}{}_{m} . \tag{5}$$

Ma è identicamente

$$x^{p'}{}_{l} x^{m}{}_{i'p'} x^{k'}{}_{m} = \partial_{l}(x^{k'}{}_{m} x^{m}{}_{i'}) - x^{k'}{}_{ml} x^{m}{}_{i'} = \\ = - x^{k'}{}_{lp} x^{m}{}_{i'} ,$$

cosicchè i due ultimi termini a secondo membro di (5) mutuamente si elidono ed è, come s'era affermato:

$$\frac{1}{2} N_{i'j'h'}{}^{k'} = x^{l}{}_{[i'j']h'} x^{k'}{}_{l} = 0. \tag{6}$$

Risulta, incidentalmente, da (4), il carattere simmetrico, in un riferimento generico, di una connessione nulla in un particolare riferimento.

B) Tornando a una generica connessione (L) attribuita ad X_n, è noto che se (L') è una seconda siffatta connessione, ha carattere tensoriale il sistema

$$D_{ij}{}^{k} = L_{ij}{}^{k} - L'_{ij}{}^{k}, \tag{7}$$

detto *divario* (nell'ordine scritto) tra le due connessioni. In un qualsivoglia riferimento in X_n, gli stessi coefficienti di (L'), assunti affatto arbitrariamente, insieme alle componenti del tensore divario — dopo ciò univocamente individuato da (L) — possono assumersi quali parametri atti a caratterizzare quest'ultima connessione. È utile, per il seguito, riferirsi a una (L'), che diremo (Γ') con coefficienti $\Gamma'_{ij}{}^{k}$ simmetrici rispetto agli indici in basso. Risulta allora da (1) e (7):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} L_{ijh}{}^{k} &= \overset{L}{\nabla}\overset{\uparrow}{[}_{i} L_{j]h}{}^{k} = \overset{\Gamma'}{\nabla}\overset{\uparrow}{[}_{i} L_{j]h}{}^{k} + D_{[i|l|}{}^{k} L_{j]h}{}^{l} = \\ &= \overset{\Gamma'}{\nabla}\overset{\uparrow}{[}_{i} \Gamma'_{j]h}{}^{k} + \overset{\Gamma'}{\nabla}_{[i} D_{j]h}{}^{k} - \underline{\Gamma'_{[i|h|}{}^{l} D_{j]l}{}^{k}} - \Gamma'_{[ij]}{}^{l} D_{lh}{}^{k} + \\ &\quad + D_{[i|l|}{}^{k} D_{j]h}{}^{l} + \underline{\Gamma'_{[j|h|}{}^{l} D_{i]l}{}^{k}} = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma'_{ijh}{}^{k} + \overset{\Gamma'}{\nabla}_{[i} D_{j]h}{}^{k} + D_{[i|l|}{}^{k} D_{j]h}{}^{l},\end{aligned} \tag{8}$$

ossia

$$\boxed{L_{ijh}{}^{k} = \Gamma'_{ijh}{}^{k} + 2\overset{\Gamma'}{\nabla}_{[i} D_{j]h}{}^{k} + 2D_{[i|l|}{}^{k} D_{j]h}{}^{l}}\,. \tag{9}$$

Si ha pure da (8):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} L_{ijh}{}^{k} &= \frac{1}{2} \Gamma'_{ijh}{}^{k} + \overset{L}{\nabla}_{[i} D_{j]h}{}^{k} - \underline{D_{[i|l|}{}^{k} D_{j]h}{}^{l}} + \\ &\quad + D_{[ij]}{}^{l} D_{lh}{}^{k} + D_{[i|h|}{}^{l} D_{j]l}{}^{k} + \underline{D_{[i|l|}{}^{k} D_{j]h}{}^{l}},\end{aligned} \tag{8'}$$

ossia

$$\boxed{\begin{aligned} &L_{ijh}{}^{k} = \Gamma'_{ijh}{}^{k} + \\ &+ 2\overset{L}{\nabla}_{[i} D_{j]h}{}^{k} + 2D_{[i|h|}{}^{l} D_{j]l}{}^{k} + 2D_{[ij]}{}^{l} D_{lh}{}^{k}\end{aligned}}\,. \tag{9'}$$

Le relazioni generali (9), (9') sono quelle annunciate alla fine del numero 1.

3. Si supponga ora nulla nel riferimento adottato, e denotata con (N), la connessione (Γ'). Ricordando l'osservazione *A*) del numero 2, le relazioni (9), (9') con corrispondenti ovvie notazioni e *indipendentemente* dalle coordinate adottate, assumono le forme ridotte:

$$L_{ijh}{}^{k} = 2\overset{N}{\nabla}_{[i} \overset{N}{D}_{j]h}{}^{k} + 2\overset{N}{D}_{[i|l|}{}^{k} \overset{N}{D}_{j]h}{}^{l}, \tag{10}$$

$$L_{ijh}{}^{k} = 2\overset{L}{\nabla}_{[i} D_{j]h}{}^{k} + 2\overset{N}{D}_{[i|h|}{}^{l} \overset{N}{D}_{j]l}{}^{k} + 2\overset{N}{D}_{[ij]}{}^{l} \overset{N}{D}_{lh}{}^{k}. \tag{10'}$$

Queste relazioni forniscono immediatamente, per via *autonoma*, una espressione *tensoriale* del sistema quadruplo di curvatura. In particolare, nel caso di una connessione Riemanniana, risulta autonomamente stabilito il carattere tensoriale del sistema quadruplo dei simboli di RIEMANN.

4. Tornando, dopo ciò, alle formule generali (9), (9') giova rilevare che la loro stessa struttura mostra ormai chiaramente l'invarianza dei secondi membri di fronte a qualsivoglia cambiamento di connessione (Γ'). È possibile usufruire di tale proprietà facendo corrispondere, con legge a priori arbitraria, una diversa connessione (Γ') a ciascun diverso sistema di riferimento; ben notando che con ciò andrà generalmente distrutto il significato tensoriale dei *singoli termini* dei secondi membri nonchè delle stesse operazioni ivi indicate, senza che nulla ne risentano le corrispondenti somme. In particolare, si può convenire di associare a ciascun sistema di riferimento la corrispondente (N) nulla ('). Con tale scelta, per cui valgono le formule (10), (10'), le componenti $\overset{N}{D}_{ij}{}^{k}$ del tensore divario si mutano negli omonimi coefficienti $L_{ij}{}^{k}$ di (L), mentre le derivazioni tensoriali si riducono a quelle ordinarie. Dalla relazione (10) si ricade così nella originaria definizione (1) del sistema quadruplo di curvatura.