Bollettino Unione Matematica Italiana

Jaurés Cecconi

Sulla identità fra due definizioni di area.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 130–137.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_130_0>

Sulla identità fra due definizioni di area.

di JAURÈS CECCONI (a Pisa).

Sunto - *Si dimostra che l'area secondo* E. R. REIFENBERG, A(S), *di una superficie* S *di* FRÉCHET *coincide con l'area secondo* LEBESGUE, L(S), *di* S.

1. In un recente lavoro [6] E, R. REIFENBERG ha introdotto una definizione di area $A(S)$ per ogni superficie S immagine continua in E_3 di una regione semplice e chiusa di JORDAN ed ha osservato che tale area coincide con l'area secondo LEBESGUE $L(S)$ ogni qualvolta $L(S)$ è finita.

(²) Si noti che se (N) è la connessione nulla attaccata alle coordinate x^i, essa è tale altresì rispetto a tutti e soli quei sistemi di riferimento che si deducono dalle x^i mediante trasformazioni lineari a coefficienti costanti

$$x^{i'} = \alpha^{i'}{}_k x^k + \beta^{i'}.$$

Le dimostrazioni di E. R. REIFENBERG, come è stato rilevato anche da H. FEDERER in una recensione al lavoro di questo Autore [5], presentano notevoli lacune e fanno ricorso a precedenti risultati di A. S. BESICOVITCH [1] le cui dimostrazioni sono pure non immuni da critiche.

Lo stesso H. FEDERER ha d'altra parte osservato che la uguaglianza $L(S) = A(S)$ (anche per $L(S) = +\infty$) ed altri risultati di E. R. REIFENBERG sono esatti e possono essere provati facendo uso della teoria dell'area che è stata sviluppata negli ultimi anni in Italia ed altrove.

Scopo della presente nota è di mostrare come l'uguaglianza $L(S) = A(S)$ possa essere dimostrata facendo uso di precedenti miei risultati [2], [3], liberando così tale affermazione non solo dalle critiche che sono state sollevate alle dimostrazioni di E. R. REIFENBERG e A. S. BESICOVITCH, ma anche dalla non necessaria ipotesi che $L(S)$ sia finita.

2. L'area $A(S)$.

Sia

$$(\Phi, H): x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \varepsilon H,$$

H essendo il cerchio unitario; $0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$; del piano uv, una rappresentazione di S.

Sia $[S]$ il sostegno di S, cioè l'insieme dei punti di xyz immagini secondo (Φ, H) di qualche punto di H.

Per ogni punto $M \varepsilon [S]$ consideriamo l'insieme $\Phi^{-1}(M)$ costituito dai punti $(u, v) \varepsilon H$ per i quali è $T(u, v) = M$. Questo insieme è chiuso ed i suoi componenti massimali sono perciò continui Q appartenenti a H.

Diciamo Φ–elemento o punto di S ogni coppia (M, Q).

Sia G un sotto insieme di H. Diciamo che $M \varepsilon [S]$ ha molteplicità k rispetto a G se esistono k componenti di $\Phi^{-1}(M)$ che incontrano G.

Poniamo quindi

$$\Lambda^2\Phi(G) = \sum_{k=1}^{\infty} k\Lambda^2 E_k$$

essendo E_k l'insieme dei punti di $[S]$ che hanno molteplicità k rispetto a G, e $\Lambda^2 E_k$ la misura 2–dimensionale sferica secondo HAUSDORFF di E_k (ved. n. 3).

Nella somma precedente si considera anche il termine $\infty \cdot \Lambda^2(E_\infty)$ e si intende $\infty \cdot a = 0$ se $a = 0$, $\infty \cdot a = \infty$ se $a > 0$.

Sia (Φ^*, H) una generica trasformazione continua di H nello spazio $E_3 \equiv xyz$.

Sia r una regione semplice di JORDAN appartenente ad H.

Indichiamo con $\{\Phi^*(r)\}^0$ l'insieme dei Φ^*-elementi; (P^*, Q^*); associati a (Φ^*, H), per i quali $Q^* \subset r^0$ (¹).

Sia Δ la classe delle trasformazioni (Φ^*, H) che coincidono con (Φ, H) in $H - r^0$.

Poniamo

$$\mu(\Phi, r) = \underset{\Delta}{\text{ext. inf.}}\, \Lambda^2 \{\Phi^*(r)\}^0 .$$

Sia $[r] \equiv (r_1, r_2, \dots r_n)$ un gruppo finito di regioni semplici di JORDAN appartenenti ad H e prive a due a due di punti in comune.

Poniamo infine

$$A(S) = \underset{[r]}{\text{ext. sup.}} \sum_{i=1}^{n} \mu(\Phi, r_i)$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i possibili gruppi $[r]$.

3. L'area secondo Peano $P(S)$.

Siano (Φ, H), r e $[r]$ dati come nel n. 2.

Sia π un generico piano in E_3, γ la linea chiusa continua orientata costituente l'immagine secondo (Φ, H) del contorno orientato r^* della regione r, γ_π la proiezione di γ sul piano π.

Sia $O(P, \gamma_\pi)$ l'indice topologico del punto $P \in \pi$ rispetto alla curva orientata γ_π se $P \bar{\in} \gamma_\pi$, sia $O(P, \gamma_\pi) = 0$ altrimenti.

Sia $m(\Phi, r, \pi)$ la misura piana secondo LEBESGUE dell'insieme misurabile dei punti di π in cui è $O(P, \gamma_\pi) \neq 0$, sia

$$\sigma(\Phi, r) = \underset{\pi}{\text{ext. sup.}}\, m(\Phi, r, \pi)$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i possibili piani π.

Sia infine

$$P(S) = \underset{[r]}{\text{ext. sup.}} \sum_{i=1}^{n} \sigma(\Phi, r_i)$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i gruppi di regioni $[r]$.

$P(S)$ è l'area secondo PEANO della superficie S; per ogni superficie S si ha [2]

$$P(S) = L(S).$$

(¹) r^0 indica l'insieme dei punti interni ad r.

4. Una proprietà della misura 2-dimensionale sferica secondo Hausdorff.

Sia E un insieme di punti dello spazio xyz. Sia $U(\delta, E) \equiv \{S_1, S_2, \ldots\}$ un gruppo finito o numerabile di sfere, ciascuna di diametro $< \delta$, ricoprente l'insieme E.

Poniamo

$$\Lambda^2(E) = \min_{\delta \to 0} \lim \frac{1}{4} \pi \sum_i (\operatorname{diam} S_i)^2$$

e chiamiamo $\Lambda^2(E)$ la misura 2-dimensionale sferica secondo HAUSDORFF di E. Parimente per ogni insieme E della retta S diciamo $U(\delta, E)$ un gruppo finito o numerabile di sfere (intervalli) ciascuno di diametro (lunghezza) minore di δ.

Poniamo

$$\Lambda^0(E) = \min_{\delta \to 0} \lim \sum_i (\operatorname{diam} S_i)^0$$

e chiamiamo $\Lambda^0(E)$ la misura 0-dimensionale sferica secondo HAUSDORFF di E.

È subito visto che $\Lambda^0(E)$ è uguale al numero (eventualmente $+\infty$) dei punti di E.

Sussiste il seguente

LEMMA. - *Sia* E *un insieme dello spazio* xyz, π *un piano,* P *un punto appartenente a* π, E(P, π) *l'intersezione di* E *con la retta per* P *perpendicolare a* π.

Sia f(P) *una funzione misurabile, per* P ε π, *per la quale risulti quasi ovunque su* π

$$f(P) \leq \Lambda^0 E(P, \pi).$$

Allora è

$$\Lambda^2(E) \geq \iint_\pi f(P) dP.$$

Se $\Lambda^2(E) = +\infty$ non c'é niente da dimostrare. Sia perciò $\Lambda^2(E) < +\infty$.

Osserviamo che per ogni piano π e per ogni sfera S si ha

$$\frac{1}{4} \pi (\operatorname{diam} S)^2 = \iint_\pi [\operatorname{diam} S(P, \pi)]^0 dP$$

ove si intenda $[\operatorname{diam} S(P, \pi)]^0 = 0$ se l'insieme $S(P, \pi)$ è vuoto.

Sia $\{G_n\} \equiv \{S_{n1}, S_{n2} \ldots\}$; $n = 1, 2, \ldots$; una successione di gruppi di sfere di raggi tendenti a zero per la quale si abbia

$$\Lambda^2(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4} \pi \sum_i (\operatorname{diam} S_{ni})^2.$$

Si ha, per ogni n,

$$\frac{1}{4}\pi \sum_i (\text{diam } S_{ni})^2 = \sum_i \iint_\pi [\text{diam } S_{ni}(P, \pi)]^0 dP = \iint_\pi \sum_i [\text{diam } S_{ni}(P, \pi)]^0 dP.$$

Si ottiene perciò passando al limite, per il *Lemma* di FATOU,

$$\Lambda^2(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\pi \sum_i (\text{diam } S_{ni})^2 \geq \iint_\pi \{ \min_{n\to\infty} \text{lim} \sum_i [\text{diam } S_{ni}(P, \pi)]^0 \} dP.$$

Per ogni n il sistema di sfere S_{ni}; $i = 1, 2, \ldots$; ricopre E, e quindi per ogni $P \varepsilon \pi$, l'insieme degli intervalli in cui le sfere S_{ni}; $i = 1, 2, \ldots$; segano la retta per P ortogonale a π ricopre $E(P, \pi)$ e la massima delle lunghezze di questi intervalli tende a zero al tendere di n all'infinito.

Si ha perciò, per ogni punto $P \varepsilon \pi$,

$$\min_{n\to\infty} \text{lim} \sum [\text{diam } S_{ni}(P, \pi)]^0 \geq \Lambda^0 E(P, \pi) \geq f(P),$$

e quindi

$$\Lambda^2(E) \geq \iint_\pi f(P) dP.$$

5. Dimostrazione del Teorema: $A(S) \geq L(S)$ per ogni superficie continua S.

Siano (Φ, H), r, Δ, (Φ^*, H), π, γ_π, $O(P, \gamma\pi)$, $m(\Phi, r, \pi)$, $\sigma(\Phi, r)$ dati come nei nn. 2 e 3.

Poichè su ogni r, (Φ, H) coincide con $(\Phi^*, H) \subset \Delta$, risulta, per ogni piano π in E_3

$$m(\Phi, r, \pi) = m(\Phi^*, r, \pi).$$

In virtù di note proprietà dell'indice topologico se $O(P, \gamma_\pi) \neq 0$, esiste sulla perpendicolare condotta per P a π almeno un punto $M \varepsilon [S_r^*]$ per il quale $\Phi^{*-1}(M)$ appartiene a r^0, essendo $[S_r^*]$ il sostegno della superficie di FRECHÉT rappresentata da (Φ^*, r).

È dunque

$$\Lambda^0[S_r^{*0}(P, \pi)] \geq o(P, \gamma_\pi),$$

ove si è indicato con $S_r^{*0}(P, \pi)$ l'intersezione dell'insieme $[S_r^{*0}] \equiv \Phi^*(r^0)$ con la retta ortogonale per P a π e con $o(P, \gamma_\pi)$ la funzione caratteristica dell'insieme dei punti $P \varepsilon \pi$ per i quali è $O(P, \gamma_\pi) \neq 0$.

Sia $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e sia (Φ^*, H) una trasformazione continua $\subset \Delta$ tale che

$$\mu(\Phi, r) > \Lambda^2 \{\Phi^*(r)\}^0 - |r| \varepsilon,$$

e quindi

$$\mu(\Phi, r) > \Lambda^2 \{\Phi^*(r)\}^0 - |r| \varepsilon \geq \iint_\pi o(P, \gamma_\pi) dP - |r| \varepsilon =$$

$$= m(\Phi^*, r, \pi) - |r| \varepsilon = m(\Phi, r, \pi) - |r| \varepsilon.$$

Ne risulta, per ogni regione r,

$$\mu(\Phi, r) \geq \sigma(\Phi, r) - |r| \cdot \varepsilon$$

e quindi, per ogni gruppo $[r]$ di regioni di JORDAN considerato come nel n. 2,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\Phi, r_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \sigma(\Phi, r_i) - \varepsilon,$$

da cui

$$A(S) \geq P(S).$$

In virtù della uguaglianza $L(S) = P(S)$ da me dimostrata risulta quindi

$$A(S) \geq L(S).$$

6. Dimostrazione del Teorema: $A(S) \leq L(S)$ per ogni superficie continua.

Per la dimostrazione di questa relazione teniamo presenti i seguenti fatti.

LEMMA 1. - Per ogni superficie $S \equiv (\Phi, H)$ si può costruire una superficie $S' \equiv (\Phi', H)$ di tipo A [4], avente lo stesso contorno di S, tale che $L(S') \leq L(S)$.

Per una dimostrazione di questo Lemma ved. (ad esempio) [4].

Diciamo che una superficie $S \equiv (\Phi, H)$ è quasi poliedrica se esiste una sua rappresentazione, sia la stessa (Φ, H), che è quasi lineare in ogni regione semplice di JORDAN interna a H.

LEMMA 2. - Per ogni superficie aperta non degenere $S \equiv (\Phi, H)$, di area secondo LEBESGUE finita, esiste una successione di superficie quasi poliedriche $S_n = (\Phi_n, H)$ aventi lo stesso contorno di S tali che $\| S_n, S \| \to 0$, $L(S_n) \to L(S)$.

Questo Lemma è stato da noi provato nella nota [3], un esame del ragionamento ivi fatto consente di dire che è, inoltre per ogni n diam $[S_n] \leq$ diam $[S]$.

LEMMA 3. – Per ogni superficie quasi poliedrica $S \equiv (\Phi, H)$ si ha $\Lambda^2 \Phi(H) = L(S)$. Questo Lemma è ovvio.

Osserviamo che per ogni superficie di tipo A possono farsi le seguenti considerazioni (ved. L. CESARI [4]).

Diciamo G la classe dei continui g di H che sono componenti di qualche $\Phi^{-1}(M)$, $\{g\}^*$ la classe dei continui di G che incontrano H, $\bar{F}$ l'insieme dei punti di H occupato dai continui di $\{g\}^*$. L'insieme $A = H - \bar{F}$ è aperto ed i suoi componenti sono una successione di insiemi aperti α_r semplicemente connessi. Per ogni r esiste una corrispondenza biunivoca e bicontinua (Ω_r, H^0) fra l'interno di H e α_r che può prolungarsi fino ad una corrispondenza biunivoca fra i punti di H^* e gli elementi di frontiera di α_r in modo che se $\{P_n\}$ è una successione di punti di $H^0[H^*]$ convergente verso un punto P_0 di H^* e $\{Q_n\}$ $[\{E_n\}]$ è la successione dei corrispondenti punti di α_r [elementi di frontiera di α_r] allora l'elemento di frontiera E_0 corrispondente a P_0 contiene l'insieme di accumulazione dei Q_n [continui E_n].

Perciò è possibile considerare le superficie continue $S_r \equiv (\Phi\Omega_r\, H)$ in ordine alle quali L. CESARI [4] ha dimostrato il seguente:

LEMMA 4. – Per ogni superficie di tipo A si ha $L(S) = \sum_{r=1}^{\infty} L(S_r)$.

Tutto ciò ci consente allora di enunciare il seguente

LEMMA 5. – Se $S \equiv (\Phi. H)$ è di tipo A e di area secondo LEBESGUE finita allora per ogni n è possibile costruire una superficie continua $S_n \equiv (\Phi_n, H)$ tale che:

a) per ogni punto $(u, v) \in \bar{F}$ si ha $\Phi(u, v) = \Phi_n(u, v)$,

b) considerato un insieme α_r e la trasformazione (Ω_r, H), che è associata a (Φ, H) e ad α_r come sopra, la trasformazione $(\Phi_n\Omega_r, H)$ rappresenta un quasi poliedro avente lo stesso contorno di $(\Phi \cdot \Omega_r, H)$,

c) $\lim_{n \to \infty} \| S_n, S \| = 0$,

d) $\lim_{n \to \infty} L(S_n) = L(S)$.

Venendo alla dimostrazione della nostra disuguaglianza proviamo intanto che si ha

$$\mu(\Phi, H) \leq L(S)$$

per ogni superficie $S \equiv (\Phi, H$.

Possiamo supporre che $L(S)$ sia finito e, in virtù del Lemma 1, che S sia di tipo A. Avremo, considerando la successione $S_n \equiv$

(Φ_n, H) del Lemma 5,

$$\mu(\Phi, H) = \inf \Lambda^2 \{\Phi^*, H\}^0 \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \Lambda^2 \{\Phi_n, H\}^0 =$$

$$= \underline{\lim}_{n \to \infty} [\sum_{r=1}^{\infty} \Lambda^2 \{\Phi_n, \alpha_r\}] = \underline{\lim}_{n \to \infty} [\sum_{r=1}^{\infty} \Lambda^2 \{\Phi_n \Omega_r, H\}^0]$$

$$= \underline{\lim}_{n \to \infty} [\sum_{r=1}^{\infty} L(\Phi_n \cdot \Omega_r, H)] = \underline{\lim}_{n \to \infty} L(S_n) = L(S).$$

ciò che prova la nostra affermazione.

Consideriamo quindi un gruppo $[r] \equiv [r_1, r_2, \ldots r_n]$ di regioni semplici di JORDAN appartenenti ad H e prive a due a due di punti in comune.

Sia S_i la superficie definita da (Φ, H) su r_i. Per la disuguaglianza sopra acquisita si ha, in virtù di una nota proprietà dell'area secondo LEBESGUE,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\Phi, r_i) \leq \sum_{i=1}^{n} L(S_i) \leq L(S).$$

In virtù della definizione di $A(S)$ si ha quindi

$$A(S) \leq L(S).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. S. BESICOVITCH, *Surfaces of minimun area*, « Jour London Math. Soc. », 23, 241-246. (1948).

[2] J. CECCONI, *Su di una congettura di T. Radò*, « Rend. Sem. Mat. » Padova, 19, 342-366, (1950).

[3] J. CECCONI, *Sull'approssimazione delle superficie di Frechét*, in corso di stampa presso la « Riv. Mat. Univ. Parma. ».

[4] L. CESARI, *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*, « Mem. Accad. Ital. », 14, 891-951, (1944).

[5] H. FEDERER, Recensione in « Math. Rew. », 14, 363, (1953); alla nota di E. R. Reifenberg, *Parametric surfaces, I°*.

[6] E. R. REIFENBERG, *Parametric surfaces, I°*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 47, 687-698 (1951).