Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulle varietà V_3 analitiche pluririgate.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 138–144.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_138_0>

Sulle varietà V_3 analitiche pluririgate.

Nota di Luigi Muracchini (a Bologna).

Sunto. - *Si determinano le* V_3 *pluririgate analitiche che appartengono allo spazio proiettivo della massima dimensione compatibile con i sistemi di rette contenuti in esse.*

1. Diremo che una varietà V_3, immersa in uno spazio proiettivo è pluririgata o, più precisamente μ–rigata, se essa contiene un sistema ∞^2 di rette tale che da un suo punto generico escono μ rette del sistema, tre qualsiansi delle quali non siano mai complanari.

Se $\mu = \infty$ (ed allora le rette costituiscono un sistema ∞^3) si hanno varietà V_3 che sono state determinate da F. Severi (1). C. H. Sisam (2) ha dimostrato che: le uniche V_3 di S_4 6–rigate sono le $V_3{}^3$ generali di quello spazio. In seguito W. Blaschke e G. Bol (3) hanno dimostrato che: le uniche V_3 di S_7 3–rigate sono le $V_3{}^6$ che rappresentano al modo di C. Segre le terne di punti di tre rette. Un recente lavoro di M. Baldassarri (4) è dedicato alla ricerca delle V_3 pluririgate, ma limitatamente al campo algebrico.

Nel presente lavoro, usufruendo anche dei risultati menzionati, pervengo al seguente risultato: *le uniche varietà* V_3 *analitiche* μ*–rigate, appartenenti allo spazio di massima dimensione compatibile con tale ipotesi sono:* (a) *per* $\mu = \infty$ *le* $V_3{}^2$ *(quadriche) di* S_4*;* (b) *per* $\mu = 6$ *le* $V_3{}^3$ *(cubiche generali) di* S_4*;* (c) *per* $\mu = 4$ *le* $V_3{}^4$ *di* S_5 *base di un fascio di* V_4 *quadriche;* (d) *per* $\mu = 3$ *le* $V_3{}^6$ *di* S_7 *di C. Segre.* Per $\mu = 2$ non vi è limitazione per la dimensione dello spazio ambiente; dimostrerò che: *le* V_3 *analitiche 2–rigate appartenenti ad uno* S_n *sono, per* $n > 10$, V_3 *luogo di* ∞^1 *quadriche di* S_3 (5).

(1) F. Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a 4 dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti,* « Rend. Circ. Mat. Palermo », 15, p. 33-51 (1901).

(2) C. H. Sisam, *On varieties of three dimensions with six right lines through each point.* « Am. Journ. Math. », 52, p. 607-610 (1930).

(3) W. Blaschke - G. Bol, *Geometrie der Gewebe,* Berlin, 1938; p. 204, Aufgabe 10.

(4) M. Baldassarri, *Le varietà pluririgate a tre dimensioni,* « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 19, p. 172-200 (1950).

(5) Questo risultato si potrebbe anche far discendere da alcuni, ottenuti in altro modo in: P. Buzano, *Sistemi di due equazioni di Laplace per*

I metodi che qui adopero sono sopratutto quelli dovuti ad E. CARTAN [6], particolarmente adatti a tale genere di ricerche.

2. Consideriamo una V_3 analitica, immersa in uno spazio proiettivo S_n ad n dimensioni, generata dal punto A. Siano A_i $(i = 1, \dots, n)$ i vertici di una piramide di riferimento proiettivo avente un vertice in A. Supponiamo di aver scelto i punti A_1, A_2, A_3 nello S_3 tangente a V_3 in A. Si hanno allora, come è ben noto [7], le formule:

$$(1)\qquad \begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\ dA_i &= \omega_{i0}A + \dots \qquad\qquad + \omega_{i3}A_3 + \dots + \omega_{in}A_n, \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, n$; le ω_{ij} sono forme di PFAFF, i cui differenziali esterni sono dati dalle note equazioni di struttura:

$$(2)\qquad [d\omega_{ij}] = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + \dots + [\omega_{in}\omega_{nj}],$$

per $i, j = 0, \dots, n$, convenendo che $\omega_{0i} = \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\omega_{0i} = \omega_i = 0$ per $i = 4, \dots, n$.

La differenziazione esterna delle $\omega_i = 0$ $(i = 4, \dots, n)$ mostra che [8] le forme $\omega_{i\alpha}$ $(i = 1, 2, 3;\ \alpha = 4, \dots, n)$ sono combinazioni lineari delle ω_1, ω_2, ω_3 e che esistono $n - 3$ forme quadratiche $\Phi_\alpha^{(2)}$ nelle ω_1, ω_2, ω_3 tali che

$$(3)\qquad \omega_{i\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega_i}\Phi_\alpha^{(2)}.$$

Sia q il numero delle forme $\Phi_\alpha^{(2)}$ che sono linearmente indipendenti: allora, com'è noto, l'$S(2)$-osculatore alla V_3 in A è uno S_{3+q} e scegliendo i punti $A_4, \dots, A_{3+q}$ in quello S_{3+q} le forme $\Phi_{4+q}^{(2)}, \dots, \Phi_n^{(2)}$ diventano identicamente nulle. Si vede subito che: *tutte e sole le tangenti asintotiche della* V_3 *uscenti da* A *corrispondono alle* ω_1, ω_2, ω_3 *che annullano tutte le forme* $\Phi_\alpha^{(2)}$. Interpretando queste ultime come rappresentanti dei coni quadrici di tangenti alla V_3 uscenti da A, si può anche dire che: le tangenti asintotiche sono tutte e sole le generatrici base del sistema lineare dei coni $\Phi_\alpha^{(2)}$.

Dalle equazioni

$$(4)\qquad \omega_{i\lambda} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3;\ \lambda = 4 + q, \dots, n)$$

una funzione di tre variabili e loro varietà rappresentative, Ist. Lombardo, Mem., (3) 13, 1-33 (1935).

(6) E. CARTAN, *Sur les variétés de courbure constante d'un éspace euclidien ou non-euclidien*, « Bull. Soc. Math. France », 47, p. 125-160 (1919); 48, p. 132-208 (1920).

(7) Per tutte le nozioni che seguono si veda l'op. cit. in (5).

(8) Op. cit. in (5) pag. 149 del vol. 48.

che si sono ottenute con la scelta dei punti $A_4, \ldots, A_{3+q}$ nello $S(2)$-osculatore a V_3 in A. si deduce, sempre per differenziazione esterna, l'esistenza di forme cubiche $\Phi_\lambda^{(3)}$ nelle ω_1, ω_2, ω_3,

$$\Phi_\lambda^{(3)} = \omega_{4\lambda}\Phi_4^{(2)} + \ldots + \omega_{3+q,\lambda}\Phi_{3+q}^{(2)} \qquad (\lambda = 4 + q, \ldots, n) \tag{3}$$

e se r è il numero delle forme $\Phi_\lambda^{(3)}$ linearmente indipendenti, l'$S(3)$-osculatore a V_3 in A è uno S_{3+q+r}. Scegliendo i punti $A_{4+q}, \ldots, A_{4+q+r}$ nello $S(3)$-osculatore predetto si rendono identicamente nulle le forme $\Phi_\lambda^{(3)}$ con $\lambda = 4 + q + r, \ldots, n$. In modo perfettamenta analogo si introducono poi successivamente forme d'ordine superiore, collegandole con gli spazi osculatori dei vari ordini alla V_3 in A.

Ricordo ora il seguente risultato di E. CARTAN (9): le forme d'ordine m prime polari di una qualsiasi forma d'ordine $m+1$ appartenente al sistema lineare delle forme $\Phi^{(m+1)}$ sono tutte forme del sistema lineare delle $\Phi^{(m)}$. Questa proposizione ci permetterà di assegnare il limite superiore della dimensione dello spazio di appartenenza di una V_3 da ciascun punto (regolare) della quale debba uscire un dato numero di tangenti asintotiche (in particolare un dato numero di rette della varietà stessa). Occorrerà tenere presente che: se l'$S(m+1)$-osculatore alle V_3 coincide in ogni suo punto con l'$S(m)$-osculatore, allora quest'ultimo è fisso ed è lo spazio ambiente della V_3 (10).

3. Se da ciascun punto di una V_3 escono $\mu \geq 5$ tangenti asintotiche non vi potrà essere che una sola forma $\Phi^{(2)}$, in base a quanto s'è detto nel n. 2. Inoltre le forme $\Phi^{(3)}$ dovranno essere tutte identicamente nulle. Infatti, solo se vi è una sola forma $\Phi^{(3)}$, che sia inoltre un cubo: $(a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3)^3$, le relative forme quadratiche prime polari si riducono ad una forma fissa. Ma questa risulta allora un quadrato: $(a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3)^2$ e se l'unica forma $\Phi^{(2)}$ della V_3 in esame fosse un quadrato le tangenti asintotiche uscenti da ciascun punto di V_3 starebbero tutte in un piano. Ma, come abbiamo già detto (11), ci interessa soltanto il caso in cui di quelle tangenti ve ne siano al più due in un piano. Pertanto, in tale ipotesi, dovrà essere $q = 1$, $r = 0$ cioè l'$S(2)$-osculatore e l'$S(3)$-osculatore a V_3 debbono in ciascun punto delle varietà

(9) Op. cit. in (5) pag. 153 del vol. 48.

(10) Tale risultato trovasi anche in E. BOMPIANI, *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee*, « Ist. Lomb. Sci. Lett. Rend. », 52, p. 610-636 (1919), a pag. 615.

(11) Cfr. il principio del n. 1.

coincidere in uno S_4. Tenendo presenti i risultati di F. SEVERI e di C. H. SISAM ricordati nel n. 1 si ottengono gli enunciati (a), (b). Si può inoltre osservare che $\mu = 6$ è il massimo numero finito di rette che possono uscire da ciascun punto di una V_3 ([12]).

Consideriamo ora il caso in cui da ciascun punto di V_3 escano $\mu = 4$ tangenti asintotiche (tre qualsiansi delle quali non siano mai complanari). Allora vi dovranno essere due forme $\Phi^{(2)}$ indipendenti soltanto ed il fascio di coni rappresentati da quelle due forme e le loro combinazioni lineari dovrà avere quattro generatrici base distinte (tre delle quali mai complanari). In tali ipotesi le forme cubiche $\Phi^{(3)}$ svaniscono tutte e si ha $q = 2$, $r = 0$. La V_3 sta dunque in S_5.

Infine se da ciascun punto di V_3 escono $\mu = 3$ tangenti asintotiche non complanari il sistema lineare dei coni $\Phi^{(2)}$ è una rete con tre generatrici base. In tale caso è facile constatare ([13]) che vi può essere al più una forma cubica $\Phi^{(3)}$ prodotto di tre forme lineari indipendenti, e che le forme $\Phi^{(4)}$ si annullano tutte identicamente. Si ha ora $q = 3$, $r = 1$ e gli spazi $S(3)$-osculatore ed ed $S(4)$-osculatore coincidono in ogni punto in uno S_7. La V_3 sta dunque in S_7 al più. Tenendo presente il risultato di W. BLASCHKE e G. BOL si ottiene ora l'enunciato (d) del n. 1.

4. Consideriamo in questo n. le V_3 2-rigate appartenenti ad uno spazio di dimensione $n > 10$. Attualmente i coni $\Phi^{(2)}$ costituiscono un sistema lineare ∞^3 con due generatrici base (che supponiamo distinte). È subito visto che si possono prendere quelle due generatrici come rette $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ e che si può disporre del riferimento in modo tale che le forme $\Phi^{(2)}$ linearmente indipendenti siano

$$\Phi_4^{(2)} = 2\omega_1\omega_2, \quad \Phi_5^{(2)} = 2\omega_1\omega_3, \quad \Phi_6^{(2)} = 2\omega_2\omega_3, \quad \Phi_7^{(2)} = \omega_3^2 \ ([14])$$

mentre

$$\Phi_\alpha^{(2)} \equiv 0 \qquad (\alpha = 8, \dots, n).$$

([12]) Non è dunque da escludere che esistano in S_4 varietà V_3 5-rigate. Ma non ci occuperemo quì di ricercarle.

([13]) Op. cit. in ([5]) pag. 154 del vol. 48.

([14]) Tutto ciò che s'è detto in questo n. 4, e ciò che si dirà poi, vale non solo per V_3 2-rigate, ma anche per V_3 che posseggono due sistemi (distinti) ∞^2 di curve asintotiche.

Le formule (3) danno ora:

$$\begin{array}{llll} \omega_{14}=\omega_2, & \omega_{15}=\omega_3, & \omega_{16}=0, & \omega_{17}=0 \\ \omega_{24}=\omega_1, & \omega_{25}=0, & \omega_{26}=\omega_3, & \omega_{27}=0 \\ \omega_{34}=0, & \omega_{35}=\omega_1, & \omega_{36}=\omega_2, & \omega_{37}=\omega_3 \end{array} \tag{6}$$

$$\omega_{1\alpha}=\omega_{2\alpha}=\omega_{3\alpha}=0 \qquad (\alpha=8,\dots,n). \tag{7}$$

La differenziazione esterna delle (7) conduce alle equazioni:

$$\begin{aligned} \omega_{4\alpha} &= a_{2\alpha}\omega_3 \\ \omega_{5\alpha} &= a_{2\alpha}\omega_2 + a_{3\alpha}\omega_3 \\ \omega_{6\alpha} &= a_{2\alpha}\omega_1 + a_{4\alpha}\omega_3 \\ \omega_{7\alpha} &= a_{3\alpha}\omega_1 + a_{4\alpha}\omega_2 + a_{5\alpha}\omega_3, \end{aligned} \qquad (\alpha=8,\dots,n) \tag{8}$$

sicchè le forme $\Phi_\alpha^{(3)}$ sono ora:

$$\Phi_\alpha^{(3)} \equiv 3a_{2\alpha}\omega_1\omega_2\omega_3 + 2a_{3\alpha}\omega_1\omega_3^2 + 2a_{4\alpha}\omega_2\omega_3^2 + a_{5\alpha}\omega_3^3. \tag{9}$$

Poichè lo spazio di immersione della V_3 è supposto avere almeno la dimensione 11, quattro delle forme (9) dovranno essere linearmente indipendenti, ed esisterà quindi un α per cui certamente $a_{2\alpha} \neq 0$. Possiamo supporre che ciò si verifichi per $\alpha=8$; è subito visto che si può scegliere il riferimento sì che risulti $a_{2\alpha}=1$ ([15]) si ha così

$$\begin{gathered} \omega_{48}=\omega_3, \quad \omega_{58}=\omega_2+a_{38}\omega_3, \quad \omega_{68}=\omega_1+a_{48}\omega_3 \\ \omega_{78}=a_{38}\omega_1+a_{48}\omega_2+a_{58}\omega_3. \end{gathered} \tag{9}$$

La differenziazione esterna della prima delle (9) conduce alle relazioni:

$$\begin{aligned} \omega_{13}+\omega_{46}+a_{38}\omega_{47} &= k_1\omega_1+k_2\omega_2+k_3\omega_3 \\ \omega_{23}+\omega_{45}+a_{48}\omega_{47} &= k_2\omega_1+k_4\omega_2+k_5\omega_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Allo stesso modo le relazioni $\omega_{17}=\omega_{27}=0$, $\omega_{37}=\omega_3$, ultime delle (6), conducono ad

$$\omega_{47}=k\omega_3 \tag{11}$$

mentre le relazioni contenute nelle colonne seconda e terza delle (6) forniscono:

$$\begin{aligned} 2\omega_{13} &= l_1\omega_1+l_2\omega_2+l_3\omega_3 \\ \omega_{23}-\omega_{45} &= l_2\omega_1 \qquad\qquad + l_4\omega_3 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} 2\omega_{23} &= m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3 \\ \omega_{13}-\omega_{46} &= \qquad\qquad m_1\omega_2+m_4\omega_3. \end{aligned} \tag{13}$$

([15]) La quantità $a_{2\alpha}$ è, come si verifica facilmente, un invariante relativo di V_3. Pertanto se è $\neq 0$ si può scegliere il riferimento in modo che risulti $a_{2\alpha}=1$.

Dal confronto della (10), (11), (12), (13) si trae che deve essere:

$$k_2 + m_1 = l_2$$
$$k_2 + l_2 = m_1$$

e pertanto

$$m_1 = l_2 = 2a.$$

Si ha dunque:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \omega_{13} &= h\omega_1 + a\omega_2 + l\omega_3 \\ \omega_{23} &= a\omega_1 + m\omega_3 + n\omega_2 \end{aligned}$$

e perciò

$$[d\omega_3] = [(\omega_{00} - \omega_{33} + l\omega_1 + n\omega_2)\omega_3]$$

si conclude che: *la forma di Pfaff* ω_3 *è integrabile.* In altri termini le due congruenze di curve asintotiche della V_3, $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ed $\omega_2 = \omega_3 = 0$ generano una famiglia ∞^1 di superficie $\omega_3 = 0$ sulla varietà. Abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione, che comprende come caso particolare quella enunciata nel n. 1: *se una* V_3 *appartenente ad uno spazio* S_n *con* $n > 10$ *contiene due famiglie (distinte)* ∞^2 *di curve asintotiche, essa risulta luogo di* ∞^1 *superficie cui appartengono le curve di quei due sistemi* [Cfr. op. cit. in (5)] (16).

5. Ci rimane ora da dimostrare la proposizione (c) del n. 1. Sappiamo già dal n. 3 che una V_3 che sia 4–rigata appartiene al più ad uno S_5. Consideriamo dunque una V_3 4–rigata di uno S_5. Consideriamo poi la V_3^* immagine della predetta V_3 sulla varietà V_5^{32} del VERONESE appartenente allo S_{20} rappresentativo delle V_4 quadriche dello S_5. La V_3^* dovrà contenere ∞^2 coniche, immagini delle rette della V_3, tali che per un punto generico P di V_3^* ne passano quattro le cui tangenti in P a tre a tre non sono mai complanari. Indichiamo con $x(u, v, w)$ il punto che descrive la V_3^* e con:

$$A_i \equiv a_i \frac{\partial}{\partial u} + b_i \frac{\partial}{\partial v} + c_i \frac{\partial}{\partial w} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

tre operatori linearmente indipendenti, le a_i, b_i, c_i essendo funzioni di u, v, w. Quanto s'è detto implica che la V_3^* soddisfa a quattro equazioni alle derivate parziali del 3° ordine (linearmente

(16) Una estensione analoga si può dare dell'enunciato (d) del n. 1 Le V_3 di S_7 che contengono 3 sistemi ∞^2 di curve asintotiche (a tangenti non complanari) sono luogo di 3 sistemi ∞^1 di superficie cui appartengono, a due a due, le curve di quei sistemi ∞^2.

indipendenti) lineari ed omogenee della forma

$$
\begin{aligned}
&A_i^{(3)}x + \lambda_i A_i^{(2)}x + \mu_i A_i x + \nu_i x = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)\\
(15)\qquad &(A_1 + A_2 + A_3)^{(3)}x + \lambda_4(A_1 + A_2 + A_3)^{(2)}x +\\
&+ \mu_4(A_1 + A_2 + A_3)x + \nu_4 x = 0
\end{aligned}
$$

dove $A_i^{(3)}$ sta ad indicare l'operazione $A_i(A_i(A_i x))$ ed analogamente per gli altri simboli. Lo $S(2)$-osculatore a $V_3{}^*$ è dunque uno S_{15}. Ma dalle (15) si ricavano, come si vede subito data la lineare indipendenza degli operatori A_i, almeno 12 conseguenze lineari ed omogenee del 4° ordine; pertanto l'$S(4)$-osculatore alla $V_3{}^*$ e al più uno S_{18}. A questo punto è necessario rilevare che: la $V_3{}^*$ non può soddisfare ad altre equazioni del 3° ordine che quelle scritte, corrispondentemente al fatto ([17]) che la V_3 di S_5 non ammette in un suo punto generico più di ∞^4 quadriche V_4 di S_5 che l'approssimano fino all'intorno del 3° ordine di quel punto.

Dalle conseguenze del quinto ordine che si ricavano da quelle del 4° predette si vede immediatamente che lo $S(5)$-osculatore a $V_3{}^*$ coincide con lo $S(4)$-osculatore e pertanto quest'ultimo è lo spazio ambiente di $V_3{}^*$. Se tale spazio è uno S_{18} la V_3 di S_5 risulta base di un fascio di quadriche V_4 di quello spazio. D'altra parte la dimensione dello $S(4)$-osculatore a $V_3{}^*$ non può essere inferiore a 18 chè altrimenti la V_3 di S_5 sarebbe base di un sistema lineare ∞^2 almeno di quadriche V_4, ma allora non sarebbe più 4-rigata come si vede immediatamente. La proposizione (c) del n. 1 è pertanto dimostrata.