Luigi Muracchini

Trasformazioni puntuali fra due spazi a configurazione caratteristica armonica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 144–152.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_144_0>

Trasformazioni puntuali fra due spazi a configurazione caratteristica armonica.

Nota di Luigi Muracchini (a Bologna)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni fra due* S_3 *proiettivi per le quali esistono, in ogni coppia regolare di punti corrispondenti, sei calotte piane del secondo ordine corrispondenti.*

1. Considerata una trasformazione puntuale analitica T fra due spazi ordinari S_3, $\overline{S}_3$ proiettivi, in una coppia regolare di punti corrispondenti A, $\overline{A}$, è noto (1) che, in generale, non esistono ca-

(17) Che si verifica con calcoli del tutto elementari.

(1) Vedasi: M. Villa, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Note I, II, III, « Atti Acc. Naz. Lincei, Rend », (8) 4, pp. 55-61, 192-196, 295-303 (1948).

lotte piane del secondo ordine di centri, A, $\bar{A}$ che si corrispondano in T. Tuttavia in casi particolari ve ne possono essere; in altro lavoro [2] ho chiamato i piani di tali calotte *piani caratteristici* della trasformazione T. Come ho rilevato in quel lavoro i piani caratteristici relativi ad una coppia regolare A, $\bar{A}$, quando esistano in numero finito [3], sono sei al più; in questo caso è facile constatare che le rette caratteristiche relative alla predetta coppia, in ciascuno degli spazi S_3, $\bar{S}_3$, debbono essere sette distinte ed avere una particolare configurazione che chiamerò *configurazione armonica*. La configurazione armonica è precisamente quella di sette rette che dal punto A (o $\bar{A}$) proiettano i quattro vertici ed i tre punti diagonali di un quadrangolo piano completo. Viceversa se le sette rette caratteristiche relative alla coppia A, $\bar{A}$ in ciascuno degli spazi S_3, $\bar{S}_3$ presentano la configurazione armonica allora sei piani caratteristici per T escono da A ($\bar{A}$) e precisamente i sei piani proiettanti i lati del quadrangolo piano completo di cui s'è detto.

Nel presente lavoro studio le trasformazioni puntuali analitiche che, nella generica coppia di punti corrispondenti, presentano la configurazione caratteristica armonica. Dimostrerò che in tale ipotesi *esistono necessariamente in* S_3 ($\bar{S}_3$) *sei famiglie* ∞^1 *di superficie caratteristiche* [4] cui sono tangenti i piani caratteristici uscenti da ciascun punto di S_3 ($\bar{S}_3$). Si possono scegliere in tre modi diversi quattro delle sei famiglie di superficie sì da formare tre 4–tessuti di superficie; ebbene tali 4–tessuti risultano tutti a *configurazione ottaedrale* [5]. Dimostrerò qui che *esistono trasformazioni puntuali del tipo indicato dipendenti da 12 funzioni arbitrarie di una variabile.* Successivamente determinerò le trasforma-

(2) L. MURACCHINI, *Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi*, «Boll. Un. Mat. Ital.», (3) 7, 123-131 (1952).

(3) Ve ne possono infatti essere anche ∞^1 ed allora appartengono necessariamente ad un fascio. (Cfr. l'op. cit. in (2)). Le trasformazioni che posseggono ∞^1 piani caratteristici nella generica coppia di punti corrispondenti sono state determinate da E. ČECH nell'op. cit. in (7).

(4) In generale, quando per la coppia generica di punti corrispondenti in una trasformazione T esistono piani caratteristici in numero finito (<6), quei piani non inviluppano famiglie di superficie. (Cfr. la op. cit. in (2)).

(5) Vedasi: J. DUBOURDIEU, *Questions topologiques de gèomètrie diffèrentielle*, «Mem. Sci. Math.» 78, Paris, 1936; W. BLASCHKE - G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Berlin, 1938. La proprietà di cui si dice sopra appartiene sempre a sei famiglie di superficie (a prescindere dal fatto ch'esse siano caratteristiche di una trasformazione) se esse godono della proprietà che i sei piani tangenti alle sei superficie delle famiglie, che passano per un punto generico dello spazio, si tagliano lungo sette rette a configurazione armonica. Ciò segue subito dalle proposizioni A, B a pag. 28 e 29 della prima delle opere sopracitate.

zioni puntuali del tipo predetto per le quali le superficie caratteristiche sono piani ed accennerò a certe per cui le superficie caratteristiche ammettono un gruppo ∞^2 di omografie in sè, le prime dipendono da una costante arbitraria e le altre da quattro costanti arbitrarie. Incidentalmente rilevo la seguente proposizione che discende dai precedenti risultati: *una trasformazione puntuale che muti sei sistemi ∞^1 di piani in piani è necessariamente una omografia, salvo che quei piani non appartengano tutti ad una stella o siano sei fasci di assi gli spigoli di un tetraedro* [6].

2. Fra due spazi S_3, $\overline{S}_3$ proiettivi, consideriamo una trasformazione puntuale T analitica e siano A, B due punti di S_3, $\overline{S}_3$ rispettivamente corrispondenti in T, la copia A, B essendo regolare. Associamo a ciascuno dei due punti, nel relativo spazio, un riferimento proiettivo per cui quei punti siano fondamentali ed indichiamo con A_i, B_i $(i=1, 2, 3)$ i rimanenti punti fondamentali. Valgono le solite formule [7].

$$(1) \qquad \begin{aligned} dA_i &= \omega_{i0}A_0 + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3, \\ dB_i &= \tau_{i0}B_0 + \tau_{i1}B_1 + \tau_{i2}B_2 + \tau_{i3}B_3, \end{aligned}$$

dove $i=0, 1, 2, 3$ ed $A_0 \equiv A$, $B_0 \equiv B$.

Se le rette AA_i, BB_i si corrispondono (per $i=1, 2, 3$) in una omografia tangente K a T nella coppia A, B si avrà

$$(2) \qquad \tau_{0i} = \omega_{0i} \qquad (i=1, 2, 3).$$

Indicheremo, d'ora in poi, ω_{0i} semplicemente con ω_i $(i=1, 2, 3)$. Come è ben noto le direzioni caratteristiche relative alla coppia A, B sono quelle relative alle ω_i che annullano la matrice

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} \omega_i \\ \Omega_i \end{matrix} \right\| \qquad (i=1, 2, 3)$$

dove le Ω_i sono forme quadratiche nelle ω_i:

$$(3') \qquad \Omega_i = \sum_{1}^{3}{}_{r,s} c^i_{rs}\omega_r\omega_s \qquad (c^i_{rs} = c^i_{sr})$$

(6) Tale proposizione ha una certa analogia con altre relative al piano ed a sistemi di rette in questo (Cfr. le op. cit. in (5)). Avrebbe un certo interesse darne una dimostrazione autonoma sotto ipotesi meno restrittive di quelle qui fatte.

(7) Per i metodi qui seguiti e le notazioni si veda: E. Čech, *Géométrie projéctive différentielle des correspondances entre deux espaces*, I, II, III, «Čas. pro Pest. Mat. a Fys.», 74, 75 (1950), pp. 32-48, 123-136, 137-157.

che dipendono dalla omografia K e si ottengono per differenziazione esterna dalle (2). All'uopo ci si serve delle solite *equazioni di struttura* di E. CARTAN,

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + \omega_{i3}\omega_{3j}], \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3), \tag{4}$$

ed analoghe per le τ_{ij}. Si ottengono così dalle (2) le relazioni:

$$\tau_{ri} - \omega_{ri} - \delta^i_r(\tau_{00} - \omega_{00}) = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_r} \qquad (i, r = 1, 2, 3) \tag{5}$$

dove δ^i_r è $=0$ per $i \neq r$ ed è $=1$ per $i = r$. Ricordiamo che si può sempre far sì che risulti

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0. \tag{6}$$

Imponiamo ora che le direzioni caratteristiche di T nella coppia A, B presentino la *configurazione armonica*; come è subito visto basta, ad esempio, imporre che le ω_i che annullano la matrice (3) siano quelle proporzionali alle seguenti terne: (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1). Con tale scelta la giaciture dei sei piani caratteristici sono le $\omega_i = 0$ e le $\omega_i - \omega_j = 0$, $(i, j = 1, 2, 3)$. Le c^i_{rs} che figurano nelle (3') debbono avere i valori seguenti:

$$\begin{gathered} c^1_{22} = c^1_{23} = c^1_{33} = c^2_{11} = c^2_{13} = c^2_{33} = c^3_{11} = c^3_{12} = c^3_{22} = 0 \\ c^1_{12} = e^3_{23}, \quad c^1_{13} = c^2_{13}, \quad c^2_{12} = c^3_{13} \\ c^2_{22} = c^1_{11} + 2c^1_{12} - 2c^2_{12}, \quad c^3_{33} = c^1_{11} + 2c^1_{13} - 2c^1_{12}. \end{gathered} \tag{7}$$

Ma si vede subito ([8]) che si può scegliere l'omografia tangente K in modo che risulti:

$$c^1_{12} = c^1_{13} = c^2_{12} = 0; \tag{8}$$

in definitiva *se le direzioni caratteristiche relative alla coppia* A, B *presentano la configurazione armonica, e solo allora, le forme* Ω_i *si possono ridurre ad*

$$\Omega_1 = c^1_{11}\omega^2_1, \quad \Omega_2 = c^1_{11}\omega^2_2, \quad \Omega_3 = c^1_{11}\omega^2_3 \tag{9}$$

con $c^1_{11} \neq 0$.

Le equazioni (5) diventano ora:

$$\begin{aligned} \tau_{ri} - \omega_{ri} &= 0 & (r \neq i = 1, 2, 3) \\ \tau_{ii} - \omega_{ii} - \tau_{00} + \omega_{00} &= c^1_{11}\omega_i & (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{10}$$

([8]) Cfr. l'op. cit. in ([7]), I.

questo sistema di equazioni di Pfaff è quello che fornisce le trasformazioni T che nella coppia generica di punti corrispondenti presentano la configurazione caratteristica armonica; passiamo ora a studiarlo.

3. Poniamo $c^1_{11} = -4a$, le equazioni (6), (10) forniscono:

$$\tau_{00} - \omega_{00} = a(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3). \tag{11}$$

D'altra parte la differenzazione esterna della (10) mostra che a è un invariante relativo; esso risulta necessariamente diverso dallo zero altrimenti la T si ridurrebbe ad una omografia (come risulta dalle (9)). Possiamo dunque far sì ([9]) che risulti $a = 1$. Allora le relazioni ottenute per differenzazione esterna dalle (10) e (11) conducono alle equazioni seguenti:

$$\tau_{i0} - \omega_{i0} + \omega_{00} - \omega_{ii} - \omega_{ij} - \omega_{ik} = \frac{1}{4}(g_{i1}\omega_1 + g_{i2}\omega_2 + g_{i3}\omega_3) \tag{12}$$

con $g_{ij} = g_{ji}$ ed $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$;

$$\begin{aligned} -4(\omega_{00} - \omega_{ii}) - 2(\tau_{i0} - \omega_{i0}) &= \lambda^i{}_i\omega_i + \lambda^i{}_j\omega_j + \lambda^i{}_k\omega_k \\ 4\omega_{ji} - (\tau_{j0} - \omega_{j0}) &= \lambda^i{}_j\omega_i + \mu^i{}_j\omega_j \\ -4\omega_{ji} &= \mu^i{}_j\omega_i + \nu^i{}_j\omega_j \end{aligned} \tag{13}$$

per $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$.

Le equazioni (12) e (13) confrontate e risolte conducono poi alle seguenti relazioni ([10]):

$$\begin{aligned} \tau_{10} - \omega_{10} &= 4(a_1 + a_2)\omega_1 \\ \tau_{20} - \omega_{20} &= 4(a_3 + a_4)\omega_2 \\ \tau_{30} - \omega_{30} &= 4(a_5 + a_6)\omega_3 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a_1\omega_1 + a_2\omega_3 , & \omega_{21} &= a_7\omega_1 + (a_3 + a_4 - a_7)\omega_2 \\ \omega_{23} &= a_3\omega_2 + a_4\omega_3 , & \omega_{12} &= a_8\omega_1 + (a_1 + a_2 - a_8)\omega_2 \\ \omega_{32} &= a_5\omega_2 + a_6\omega_3 , & \omega_{31} &= a_9\omega_1 + (a_5 + a_6 - a_9)\omega_3 , \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \omega_{00} - \omega_{11} &= (a_{10} - 2a_1 - 2a_2)\omega_1 - a_7\omega_2 - a_9\omega_3 \\ \omega_{00} - \omega_{22} &= (a_8 - a_1 - a_2)\omega_1 + (a_{11} - 2a_4 - 2a_3)\omega_2 - a_5\omega_3 \\ \omega_{00} - \omega_{33} &= - a_2\omega_1 - a_4\omega_2 + (a_{12} - 2a_5 - 2a_6)\omega_3 . \end{aligned}$$

([9]) Fissando in modo opportuno parte del riferimento nello spazio S_3 (Vedasi l'op. cit. in ([7])).

([10]) Avendo cambiato le notazioni in modo facilmente comprensibile.

Dalle precedenti formule (12) discende intanto che:

$$[d\omega_1] = [d\omega_2] = [d\omega_3] = 0, \tag{15}$$

ω_1, ω_2, ω_3 risultando pertanto dei differenziali esatti. Si conclude che: *i piani caratteristici* $\omega_i = 0$, $\omega_i - \omega_j = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ *in ciascuno degli spazi* S_3, $\overline{S}_3$, *inviluppano sempre sistemi di superficie caratteristiche.*

Il riferimento proiettivo in S_3 non è ancora completamente fissato, come risulta dalle (14). Possiamo approfittarne per semplificare ancora quelle equazioni. All'uopo si differenzino esternamente le prime tre (14); le relazioni che si ottengono mostrano che si può far sì che risulti

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 0, \tag{16}$$

dopo di che il riferimento è fissato completamente. Si ha allora, dopo aver cambiato lievemente le notazioni:

$$\tag{17}\begin{gathered}
\omega_{13} = k_1(\omega_1 - \omega_3), \quad \omega_{21} = k_4(\omega_2 - \omega_1) \\
\omega_{23} = k_2(\omega_2 - \omega_3), \quad \omega_{12} = k_5(\omega_1 - \omega_2) \\
\omega_{32} = k_3(\omega_3 - \omega_2), \quad \omega_{31} = k_6(\omega_3 - \omega_1), \\
\\
\omega_{00} - \omega_{11} = k_7\omega_1 + k_4\omega_2 + k_6\omega_3 \\
\omega_{00} - \omega_{22} = k_5\omega_1 + k_8\omega_2 + k_3\omega_3 \\
\omega_{00} - \omega_{33} = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_9\omega_3 \\
\\
\omega_{10} = \tau_{10} = k_{10}\omega_1 \\
\omega_{20} = \tau_{20} = k_{11}\omega_2 \\
\omega_{30} = \tau_{30} = k_{12}\omega_3 .
\end{gathered}$$

La $k_i (1 \leq i \leq 12)$ che figurano ora nelle (17) sono *invarianti proiettivi fondamentali* delle trasformazioni T del tipo esaminato [11]. Esse soddisfano a 12 condizioni di integrabilità che si ottengono per differenzazione esterna dalle (17). Non trascrivo qui quelle 12 condizioni che si possono del resto scrivere immediatamente; da essa risulta subito [12] che: *le trasformazioni* T *a configurazione caratteristica armonica dipendono da 12 funzioni arbitrarie di una variabile.*

[11] Le (17) permetterebbero di calcolare gli *sviluppi locali* delle coordinate di B (proiettive non omogenee) in serie di potenze delle coordinate di A e si potrebbero così assegnare interpretazioni geometriche degli invarianti k_i.

[12] Vedasi ad es.: E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques*, Paris, Hermann, 1945.

4. Non intraprenderemo qui lo studio del sistema (17) nel caso più generale, che si presenta alquanto complicato. Ci accontenteremo di esaminare quei casi particolari di cui abbiamo detto nel n. 1 aggiungendo alcune osservazioni.

Si ha in primo luogo dalla (17) che la forma quadratica delle asintotiche ([13]) delle superficie caratteristiche $\omega_1 = 0$ è:

$$\varphi_1 = k_4 \omega^2_2 + k_6 \omega^2_3 \tag{18}$$

Le superficie $\omega_1 = 0$ sono dunque piani se, e solo se, risulta $k_4 = k_6 = 0$. In tale caso si ha:

$$\omega_{21} = 0 , \quad \omega_{31} = 0$$

e da queste, per differenzazione esterna, si ricavano le relazioni: $k_{11} = k_{12} = 0$. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} dA_2 &= \omega_{22} A_2 + \omega_{23} A_3 , \quad & dB_2 &= \tau_{22} B_2 + \omega_{23} B_3 \\ dA_3 &= \omega_{32} A_2 + \omega_{33} A_3 , \quad & dB_3 &= \omega_{32} B_2 + \tau_{33} B_3 , \end{aligned}$$

da queste segue subito che i punti d^2A_2, d^2A_3 appartengono alla retta A_2A_3 e che i punti d^2B_2, d^2B_3 appartengono alla retta B_2B_3. Si conclude che ([14]): *se una delle famiglie di superficie caratteristiche è una famiglia di piani, essa è necessariamente un fascio di piani.*

Consideriamo ora il caso in cui tre delle famiglie di superficie sono famiglie di piani. Due eventualità si possono presentare a seconda che i tre piani di quelle tre famiglie, che escono da un punto generico dello spazio, appartengono o non appartengono ad un fascio. Si vede senza difficoltà che quei due tipi di trasformazioni sono caratterizzati rispettivamente dalle seguenti condizioni:

$$k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0 , \quad k_7 = k_8 \tag{19}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0. \tag{20}$$

Le (19) si hanno nell'ipotesi che le tre famiglie di piani siano le $\omega_1 = \omega_2 = \omega_1 - \omega_2 = 0$; le (20) si hanno invece quando le tre famiglie sono le $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$.

Le (19), (20) rispettivamente portano alle seguenti conseguenze

$$k_7 = k_8 = k \text{ (costante)}; \quad k_{10} = k_{11} = k_{12} = 0 \tag{19'}$$

(20′) k_7, k_8, k_9, funzioni di una sola variabile, diversa per ciascuna di esse; $k_{10} = k_{11} = k_{12} = 0$.

([13]) Cfr. l'op. cit. in ([2]).

([14]) Perchè manifestamente quello che si è detto per le superficie $\omega_1 = 0$ si può ripetere per le altre.

Si vede così che: *in entrambi i casi le trasformazioni dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile.* Inoltre: nel caso delle (19) le tre famiglie di piani sono fasci ad assi concorrenti e nel caso delle (20) tre fasci ad assi complanari (non concorrenti) ([15]).

Aggiungiamo ancora le seguenti osservazioni, che si verificano senza difficoltà: se quattro delle sei famiglie di superficie caratteristiche sono famiglie di piani formanti un 4–tessuto allora anche le due rimanenti famiglie sono di piani; se invece le quattro famiglie di piani non formano un 4–tessuto si hanno trasformazioni dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile ([16]). Segue che: se cinque famiglie di superficie sono famiglie di piani anche la sesta è una famiglia di piani.

Veniamo ora alla determinazione delle trasformazioni per le quali tutte le sei famiglie sono di piani. Dovrà essere:

$$k_i = 0 \ (1 \leq i \leq 6;\ i = 10,\ 11,\ 12);\ k_7 = k_8 = k_9 = k \ (\text{costante}).$$

Per tali valori delle k_i il sistema che fornisce le trasformazioni si integra senza difficoltà e si trovano le equazioni di quelle in forma esplicita. Se $k \neq 0$ esse sono:

$$\xi = x^n, \quad \eta = y^n, \quad \zeta = z^n \tag{21}$$

dove ξ, η, ζ sono coordinate proiettive non omogenee in $\overline{S}_3$ ed x, y, z le analoghe in S_3. Tali trasformazioni dipendono da una costante arbitraria. Se invece $k = 0$ le equazioni sono:

$$\xi = e^x, \quad \eta = e^y, \quad \zeta = e^z. \tag{22}$$

5. Un' altro tipo interessante di trasformazioni a configurazione caratteristica armonica si ottiene nell' ipotesi che gli invarianti fondamentali k_i siano tutti costanti (e $\neq 0$). Mostreremo ora che tali trasformazioni dipendono da quattro costanti arbitrarie. Le relative *superficie caratteristiche sono superficie non rigate che ammettono un gruppo ∞^2 di omografie in sè e le curve caratteristiche sono curve* W *di Klein–Lie.* Indicheremo il procedimento che conduce alle equazioni di quelle trasformazioni in forma esplicita. Ma ci accontenteremo di determinare la forma di quelle equazioni senza effettuare completamente i calcoli delle costanti che vi figurano, i quali non sono privi di difficoltà. Anzitutto la differen-

([15]) Nel caso (20) si scrivono subito le equazioni in forma esplicita delle trasformazioni. Esse sono $\xi = f(x)$, $\eta = \varphi(y)$, $\zeta = \psi(z)$; f, φ, ψ funzioni arbitrarie.

([16]) Le equazioni delle trasformazioni in forma esplicita sono in quest' ultimo caso: $\xi = x^n$, $\eta = y^n$, $\zeta = f(z)$ oppure $\xi = e^x$, $\eta = e^y$, $\zeta = f(z)$; f, funzione arbitraria, n costante arbitraria.

zazione delle prime sei (17) fornisce le relazioni:

$$
\begin{aligned}
& k_1k_2 - k_1k_4 - k_2k_5 = 0 \\
(23) \qquad & k_4k_6 - k_4k_3 - k_6k_2 = 0 \\
& k_3k_5 - k_3k_1 - k_5k_6 = 0
\end{aligned}
$$

ed altre sei relazioni che permettono di esprimere (razionalmente) le k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12} per mezzo delle prime sei k_i. Le altre equazioni (17) non forniscono nessuna altra relazione fra le k_i. Ora si osservi che le (23) permettono di esprimere soltanto due delle k_i $(1 \leq i \leq 6)$ in funzione delle rimanenti quattro; tanto basta per concludere che le trasformazioni in esame dipendono da 4 costanti arbitrarie. Ricordiamo ora che in virtù delle (15) ω_1, ω_2, ω_3 sono dei differenziali esatti; poniamo dunque

$$\omega_1 = du\,, \quad \omega_2 = dv\,, \quad \omega_3 = dw\,.$$

Le prime delle (1), tenuto conto delle (17) e delle relazioni fra le k_i conducono ad esprimere le $\frac{\partial A_i}{\partial u}$, $\frac{\partial A_i}{\partial v}$, $\frac{\partial A_i}{\partial w}$ come combinazioni lineari a coefficienti costanti delle A_i. Analogamente poi le seconda (1) per le B_i. Eliminando, mediante derivazione parziale e confronto, fra le relazioni ottenute le A_i per $i = 1, 2, 3$, e analogamente pe la B_i. si perviene infine ad esprimere le sei derivate parziali seconde di A (e di B) come combinazioni lineari (omogenee) a coefficienti costanti di A (o di B) e delle sue derivate parziali prime. I due sistemi alle derivate parziali così ottenuti sono certamente completamente integrabili in virtù delle relazioni che intercedono fra la k_i. Si conclude infine che A e B hanno espressioni della forma:

$$
(24) \qquad
\begin{aligned}
A &= \sum_{1}^{4}{}_s\, C_s e^{\alpha_s u + \beta_s v + \gamma_s w} && (C_s \text{ costanti}) \\
B &= \sum_{1}^{4}{}_s\, C_s' e^{\alpha'_s u + \beta'_s v + \gamma'_s w} && (C'_s \text{ costanti})
\end{aligned}
$$

dove le α_s, α'_s, ecc. sono opportune costanti ([17]). Pertanto le equazioni esplicite delle trasformazioni sono della forma:

$$
(25) \qquad
\begin{aligned}
\xi &= x^{l_1} \cdot y^{m_1} \cdot z^{n_1} \\
\eta &= x^{l_2} \cdot y^{m_2} \cdot z^{n_2} \\
\zeta &= x^{l_3} \cdot y^{m_3} \cdot z^{n_3}
\end{aligned}
$$

dove le l_i, m_i, n_i sono opportune costanti.

([17]) Per la genericità dei valori delle k_i, i due sistemi di equazioni alle derivate parziali nelle A, B, non hanno soluzioni che siano polinomi nelle u, v, w moltiplicati per un fattore esponenziale.