Bollettino
Unione Matematica Italiana

Roberto Conti

Problemi ai limiti lineari generali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Un teorema di esistenza.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 153–159.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_153_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Problemi ai limiti lineari generali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Un teorema di esistenza.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze).

Sunto. - *Si mostra, nel caso* $k=3$, *come il metodo di recente usato dall'A. per risolvere problemi ai limiti lineari per sistemi della forma*

$$\begin{cases} y_i' = F_i y_{i+1} + \varphi_i & (i=1,\,2,\dots,\,k-1) \\ y_k' = \varphi_k \end{cases}$$

(con F_i, φ_i *funzioni soddisfacenti le ipotesi di* CARATHÉODORY*) si possa applicare anche per risolvere i problemi con le condizioni ai limiti lineari qualunque per sistemi della forma più generale*

$$y_i' = \sum_j^k {}_i F_{ji} y_j + \varphi_i; \qquad (i=1,\,2,\dots,\,k)$$

(F_{ij}, φ_i *funzioni soddisfacenti ad ipotesi di* CARATHÉODORY*).*

1. Mi sono occupato di recente della risoluzione di problemi ai limiti con condizioni lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie della forma

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} y_i' = F_i y_{i+1} + \varphi_i; & (i=1,\,2,\dots,\,k-1) \\ y_k' = \varphi_k \end{cases}$$

dove le F_i $(i=1,\,2,\dots,\,k-1)$ e le φ_i $(i=1,\,2,\dots,\,k)$ sono funzioni (reali) delle variabili x, $y_1,\dots,y_k$ definite nello strato

$$C_\infty: \qquad \alpha \leq x \leq \beta, \qquad |y_i| < \infty, \qquad (i=1,\,2,\dots,\,k)$$

ed ivi sottoposte ad ipotesi opportune.

Durante la stesura del lavoro (che indicherò da ora con « L » ed al quale farò riferimento per evitare inutili ripetizioni [1]) ho potuto rendermi conto che il metodo risolutivo ivi impiegato si presta anche alla risoluzione dei problemi ai limiti con k condizioni (lineari) di tipo più generale di quelle considerate in « L » e per sistemi della forma

$$(B) \qquad y_i' = \sum_j^k {}_i F_{ij} y_j + \varphi_i; \qquad (i=1,\,2,\dots,\,k),$$

[1] R. CONTI, *I problemi ai limiti lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Teoremi di esistenza*, « Annali di Matematica pura ed appl. », T. 35 (1953), (in corso di pubblicazione).

(con F_{ij}, φ_i funzioni definite in C_∞), dei quali i sistemi (A) costituiscono un caso particolare.

Non ho ritenuto di dover procedere ad una nuova stesura del lavoro in questi termini più generali, principalmente per non appesantire troppo la trattazione, ed anche perchè mi è sembrato che l'impostazione di « L » fosse sufficientemente ampia da inquadrare, se non tutti almeno quelli più noti fra i problemi ai limiti lineari. Tuttavia ho accennato (nel n. 11, *e*) ed *f*) di « L ») alle possibili generalizzazioni sopra dette.

La presente Nota è originata dal desiderio di rendere più esplicito tale accenno, pur mantenendo la trattazione nel caso $k = 3$, nel quale la complicazione formale resta contenuta entro limiti modesti.

2. I dati del problema sono i seguenti:

i) un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine

$$\text{(B)} \qquad y_i' = \sum_{i}^{3}{}_j F_{ij} y_j + \varphi_i : \qquad (i = 1, 2, 3)$$

con F_{ij}, φ_i funzioni (reali) definite nello strato

$$C_\infty : \qquad \alpha \leq x \leq \beta, \qquad |y_i| < \infty ; \qquad (i = 1, 2, 3).$$

ed ivi del tipo di CARATHÉODORY [2];

ii) tre punti $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ interni ad (α, β);

iii) una terna di numeri reali η_1, η_2, η_3;

iv) una matrice reale del 3° ordine (γ_{ij}) $(j, i = 1, 2, 3)$.

Con questi dati si chiede di *stabilire l'esistenza di almeno una soluzione di* (B) [3] *che soddisfi le condizioni ai limiti*

$$\text{(L)} \qquad \sum_{1}^{3}{}_i \gamma_{ji} y_i(\xi_j) = \eta_j ; \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Gli stessi metodi che in « L » hanno permesso di risolvere questo problema nel caso

$$F_{11} \equiv F_{22} \equiv F_{33} \equiv F_{13} \equiv 0,$$

(2) Con ciò intendiamo, come in « L », che le funzioni dette siano continue rispetto ad (y_1, y_2, y_3) per ogni x di (α, β), misurabili rispetto ad x per ogni (y_1, y_2, y_3) e maggiorate in valore assoluto da una funzione della x, sommabile in (α, β).

(3) Nel senso di CARATHÉODORY: soluzione di (B) è ogni terna di funzioni assolutamente continue $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ soddisfacenti le (B) quasi dappertutto in (α, β).

e con una matrice (γ_{ji}) di tipo particolare, valgono, come ora mostreremo, ad ottenere la soluzione in generale, sotto ipotesi che estendono a questo caso quelle ammesse in « L ».

Tali ipotesi riguardano il determinante di una certa matrice che diremo associato alle (L) secondo le funzioni F_{ij}; tale determinante si definisce come ora vedremo.

3. Ogni terna di funzioni $y_i(x)$ assolutamente continue che soddisfano in (α, β) il sistema di equazioni integrali

$$
(1) \qquad y_i(x) = \lambda_i e^{\int_\alpha^c F_{ii}(t)dt} + \sum_{i+1}^{3}{}_j \int_\alpha^x e^{\int_t^x F_{ii}(u)du} F_{ij}(t) y_j(t)dt + \int_\alpha^x e^{\int_t^x F_{ii}(u)du} \varphi_i(t)dt; \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)
$$

con $\lambda_i = \text{cost.}$ (e dove $F_{ij}(t)$ sta per $F_{ij}(t,\ y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t))$, ecc.) è anche una soluzione di (B), come è subito visto moltiplicando ambo i membri di (1) per $\exp\left(-\int_\alpha^x F_{ii}(t)dt\right)$ e derivando rispetto alla x.

Risolveremo perciò il nostro problema determinando una terna di numeri λ_i ed in corrispondenza una terna di funzioni $y_i(x)$ soddisfacenti le (1) e le (L).

Si vede, con qualche calcolo, che le (1) si possono scrivere anche

$$
(2) \qquad y_i(x) = \sum_{i}^{3}{}_l E_{il}(\alpha,\ x)\lambda_l + \Phi_i(\alpha,\ x), \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),
$$

dove si ponga

$$
(3) \begin{cases}
E_{ii}(\alpha,\ x) = e^{\int_\alpha^x F_{ii}(t)dt}; \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \\[2mm]
E_{12}(\alpha,\ x) = \displaystyle\int_\alpha^x e^{\int_\alpha^t F_{22}(u)du + \int_t^x F_{11}(u)du} F_{12}(t)dt \\[2mm]
E_{23}(\alpha,\ x) = \displaystyle\int_\alpha^x e^{\int_\alpha^t F_{33}(u)du + \int_t^x F_{22}(u)du} F_{23}(t)dt \\[2mm]
E_{13}(\alpha,\ x) = \displaystyle\int_\alpha^x \int_\alpha^t e^{\int_\alpha^u F_{33}(v)dv + \int_u^t F_{22}(v)dv + \int_t^x F_{11}(v)dv} F_{12}(t)F_{23}(u)dudt + \\
\qquad + \displaystyle\int_\alpha^x e^{\int_\alpha^t F_{33}(u)du + \int_t^x F_{11}(u)du} F_{13}(t)dt,
\end{cases}
$$

ed inoltre

$$(4)\quad\begin{cases}\Phi_1(\alpha, x) = \displaystyle\int_\alpha^x\int_\alpha^t\int_\alpha^u e^{\int_t^x F_{11}(u)du + \int_u^t F_{22}(v)dv + \int_v^u F_{33}(z)dz} F_{12}(t)F_{23}(u)\varphi_3(v)dvdudt + \\ \quad + \displaystyle\int_\alpha^x\int_\alpha^t e^{\int_t^x F_{11}(u)du + \int_u^t F_{22}(v)dv} F_{12}(t)\varphi_2(u)dudt + \\ \quad + \displaystyle\int_\alpha^x\int_\alpha^t e^{\int_t^x F_{11}(u)du + \int_u^t F_{33}(v)dv} F_{13}(t)\varphi_3(u)dudt + \int_\alpha^x e^{\int_t^x F_{11}(u)du}\varphi_1(t)dt, \\ \Phi_2(\alpha, x) = \displaystyle\int_\alpha^x\int_\alpha^t e^{\int_t^x F_{22}(u)du + \int_u^t F_{33}(v)dv} F_{23}(t)\varphi_3(u)dudt + \int_\alpha^x e^{\int_t^x F_{22}(u)du}\varphi_2(t)dt \\ \Phi_3(\alpha, x) = \displaystyle\int_\alpha^x e^{\int_t^x F_{33}(u)du}\varphi_3(t)dt.\end{cases}$$

Se le $y_i\,(x)$ rappresentate dalle (2) soddisfano le condizioni ai limiti (L) si avrà

$$\sum_1^3{}_i\, \gamma_{ji}y_i(\xi_j) - \eta_j = \sum_1^3{}_i\, \gamma_{ji}\sum_i^3{}_l\, E_{il}(\alpha, \xi_j)\lambda_l + \sum_1^3{}_i\, \gamma_{ji}\Phi_i(\alpha, \xi_j) - \eta_j = 0$$

ossia

$$(5)\quad \gamma_{j1}E_{11}(\alpha, \xi_j)\lambda_1 + \{\gamma_{j1}E_{12}(\alpha, \xi_j) + \gamma_{j2}E_{22}(\alpha, \xi_j)\}\lambda_2 + \{\gamma_{j1}E_{13}(\alpha, \xi_j) + $$
$$+ \gamma_{j2}E_{23}(\alpha, \xi_j) + \gamma_{j3}E_{33}(\alpha, \xi_j)\}\lambda_3 = \eta_j - \sum_1^3{}_i\, \gamma_{ji}\Phi_i(\alpha, \xi_j)\,; \quad (j = 1, 2, 3),$$

Diremo allora matrice associata alle condizioni (L) secondo le F_{ij} la matrice

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}E_{11}(\alpha, \xi_1) & \gamma_{11}E_{12}(\alpha, \xi_1) + \gamma_{12}E_{22}(\alpha, \xi_1) & \gamma_{11}E_{13}(\alpha, \xi_1) + \gamma_{12}E_{23}(\alpha, \xi_1) + \gamma_{13}E_{33}(\alpha, \xi_1) \\ \gamma_{21}E_{11}(\alpha, \xi_2) & \gamma_{21}E_{12}(\alpha, \xi_2) + \gamma_{22}E_{22}(\alpha, \xi_2) & \gamma_{21}E_{13}(\alpha, \xi_2) + \gamma_{22}E_{23}(\alpha, \xi_2) + \gamma_{23}E_{33}(\alpha, \xi_2) \\ \gamma_{31}E_{11}(\alpha, \xi_3) & \gamma_{31}E_{12}(\alpha, \xi_3) + \gamma_{32}E_{22}(\alpha, \xi_3) & \gamma_{31}E_{13}(\alpha, \xi_3) + \gamma_{32}E_{23}(\alpha, \xi_3) + \gamma_{33}E_{33}(\alpha, \xi_3) \end{pmatrix};$$

indicheremo con $D = D(\alpha)$ il determinante di questa matrice e lo diremo *determinante associato alle* (L) *secondo le* F^{ij}.

Prima di procedere vediamo in che modo questo determinante dipende da α; derivando rispetto ad α (per colonne) si trova

$$D'(\alpha) = -\sum_1^3{}_i\, F_{ii}(\alpha)D(\alpha)$$

quindi [4]

$$D(\alpha) = D(\alpha_0)\exp\,\Big(-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sum_1^3{}_i\, F_{ii}(\alpha)d\alpha\Big)$$

[4] Si noti l'analogia con la nota formula di JACOBI, per i sistemi lineari (cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte 1ª, (Bologna, 1941), p. 50).

Segue da ciò che se D è diverso da zero per un particolare valore compreso tra α e β esso è diverso da zero per qualunque valore.

4. Ciò premesso si dimostra il

TEOREMA. - *Il sistema*

(B) $$y_i' = \sum_i^3 F_{ij} y_j + \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

con le F_{ij}, φ_i *definite in* C_∞ *ed ivi del tipo di* CARATHEODORY (cfr. nota (*)) *ha almeno una soluzione che soddisfa le condizioni*

(L) $$\sum_1^3 \gamma_{ji} y_i(\xi_j) = \eta_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

se i numeri $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ *e la matrice* (γ_{ij}) *sono tali che esista un numero* $d > 0$ *per il quale si abbia in* C_∞

$$|D| \geq d,$$

essendo D *il determinante associato alle* (L) *secondo le* F_{ij}.

Posto $\delta = \beta - \alpha$ sia n_0 il massimo intero positivo contenuto in $\delta/(\xi_1 - \alpha)$ (si tenga presente che è $\alpha < \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 < \beta$).

Per ogni intero $n > n_0$ definiamo in (α, β) tre funzioni $y_{in}(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ ponendo

(T_1) $$y_{in}(x) = \lambda_{in} \quad \text{per} \quad \alpha \leq x \leq \alpha + \delta/n$$

dove $\lambda_{in} (i = 1, 2, 3)$ sono tre parametri per ora arbitrari, e ponendo

(T_2) $$y_{in}(x) = \sum_i^3 E_{il}^{(n)}(\alpha, x_n)\lambda_{ln} + \Phi_i^{(n)}(\alpha, x_n) \quad \text{per} \quad \alpha + \delta/n \leq x \leq \beta,$$

dove

$$x_n = x - \delta/n$$

e dove

$$E_{ii}^{(n)}(\alpha, x_n) = e^{\int_\alpha^{x_n} F_{ii}(t,\, y_{1n}(t),\, y_{2n}(t),\, y_{3n}(t))dt}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

e analogamente (dalle (3)) per $E_{12}^{(n)}(\alpha, x_n)$, $E_{23}^{(n)}(\alpha, x_n)$, $E_{13}^{(n)}(\alpha, x_n)$ e per $\Phi_i^{(n)}(\alpha, x_n)$. $(i = 1, 2, 3)$.

Determiniamo ora i parametri λ_{ln} in modo che le $y_{in}(x)$ soddisfino per ogni n le (L), ponendo (cfr. (5)):

(6) $$\gamma_{j1} E_{11}^{(n)}(\alpha, \xi_{jn})\lambda_{1n} + \ldots = \eta_j - \sum_1^3 \gamma_{ji} \Phi_i^{(n)}(\alpha, \xi_{jn}); \qquad (j = 1, 2, 3)$$

dove

(7) $$\xi_{jn} = \xi_j - \delta/n.$$

Le (6) rappresentano un sistema di tre equazioni nelle tre incognite λ_{1n}, λ_{2n}, λ_{3n} le quali compaiono anche nei « coefficienti » e nei « termini noti » ; in virtù di un Lemma dimostrato in « L » (5) per le ipotesi fatte sulle F_{ij}, φ_i e sul D ammette almeno una soluzione λ^*_{1n}, λ^*_{2n}, λ^*_{3n}.

Dopo di ciò la dimostrazione si svolge come in « L ».

5. Come applicazione, risolviamo un problema che *non* rientra tra quelli considerati in « *L* », nel § 2.

È dato il sistema di 2 equazioni del 1° ordine, dipendenti da un parametro:

$$(8)\qquad \begin{cases} u' = \lambda f(x, u, v) \\ v' = \lambda g(x, u, v) \end{cases}$$

con $f(x, u, v)$, $g(x, u, v)$ definite per

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad |u| < \infty, \quad |v| < \infty$$

e del tipo di CARATHEODORY.

Si vuol sapere se esiste un valore di λ ed una soluzione del corrispondente sistema in modo che siano soddisfatte le condizioni

$$(9)\qquad \gamma_{i1}u(\xi_i) + \gamma_{i2}v(\xi_i) + \gamma_{i3}\lambda = \eta_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Posto $u = y_1$, $v = y_2$, $\lambda = y_3$ si ha un sistema del tipo (B) con le F_{11}, F_{22}, F_{33}, F_{12}, φ_1, φ_2, φ_3 identicamente nulle e con

$$F_{13}(x, y_1, y_2, y_3) = f(x, u, v), \quad F_{23}(x, y_1, y_2, y_3) = g(x, u, v),$$

cosicchè se γ indica il determinante della (γ_{ij}) si ha

$$D = \gamma + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{11}\int_\alpha^{\xi_1} f(t)dt + \gamma_{12}\int_\alpha^{\xi_1} g(t)dt \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{21}\int_\alpha^{\xi_2} f(t)dt + \gamma_{22}\int_\alpha^{\xi_2} g(t)dt \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{31}\int_\alpha^{\xi_3} f(t)dt + \gamma_{32}\int_\alpha^{\xi_3} g(t)dt \end{vmatrix},$$

(5) Il Lemma, conseguenza immediata di una nota proposizione sulle radici dei sistemi di equazioni (cfr. F. SEVERI - G. SCORZA DRAGONI, *Lezioni di Analisi*, Vol. 3° (Bologna, 1951), pp. 163-4) è il seguente: « Sia dato un sistema di k equazioni nelle k incognite $x_1, \ldots, x_k$

$$(')\qquad a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rk}x_k = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

dove le $a_{r,s}(r, s = 1, 2, \ldots, k)$ e le $c_r(r = 1, 2, \ldots, k)$ sono funzioni delle $x_1, \ldots, x_k$ definite per ogni k-upla reale $x_1, \ldots, x_k$, soddisfacenti le condizioni: *i*) le $a_{r,s}$, c_r sono continue e limitate; esistono cioè due numeri $a \geq 0$, $c \geq 0$ tali che $|a_{rs}| \leq a$, $|c_r| \leq c$; *ii*) posto $\Delta = \det(a_{rs})$ esiste un numero $d > 0$ tale che $|\Delta| \geq d$. Il sistema (') ammette allora almeno una soluzione $x_1, \ldots, x_k$, la quale soddisfa le limitazioni $|x_r| \leq k!\, ca^{k-1}/d$ ».

con $f(t) = f(t, u(t), v(t))$ e $g(t) = g(t, u(t), v(t))$, e dal teorema dimostrato si ricava subito una condizione per la risolubilità del problema posto.

Particolarizzando la (γ_{ij}) si possono ottenere varii problemi ed altrettante condizioni di risolubilità; ad es. se $\gamma_{11}\gamma_{21}\gamma_{32} \neq 0$, mentre ogni altro γ_{ij} è nullo si ha $\gamma = 0$ e

$$|D| = |\gamma_{11}\gamma_{21}\gamma_{32}| \left| \int_{\xi_2}^{\xi_1} f(t)dt \right|$$

da cui la condizione sufficiente che $f(x, u, v)$ sia > 0 quasi dappertutto in (α, β) per ogni (u, v) [6].