Bollettino
Unione Matematica Italiana

Emilio Gagliardo

Sulla convergenza uniforme di alcune serie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 173–177.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sulla convergenza uniforme di alcune serie

Nota di EMILIO GAGLIARDO (a Genova).

Sunto. - *Vedi il n. 1 della nota.*

1. Consideriamo una successione di numeri: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ soddisfacenti alla condizione: $\lim_{n \to \infty} a_n = o$, e tali che la serie: $\sum_1^\infty {}_n |a_n - a_{n+1}|$ sia convergente [1]; ed un'altra successione di numeri: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tali che la differenza: $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ per $n \to \infty$ tenda monotonamente ad un numero $q > 0$.

Vogliamo dimostrare che le serie:

$$\text{(1)} \qquad \sum_1^\infty {}_n\, a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad \sum_1^\infty {}_n\, a_n \cos(\lambda_n x), \qquad \sum_1^\infty {}_n\, a_n \sin(\lambda_n x),$$

$$\text{(2)} \qquad \sum_1^\infty {}_n (-1)^n a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad \sum_1^\infty {}_n (-1)^n a_n \cos(\lambda_n x), \qquad \sum_1^\infty {}_n (-1)^n a_n \sin(\lambda_n x),$$

(3) $\sum_1^\infty {}_n\, a_n P_n(x)$ ove P_n è il polinomio di LEGENDRE di grado n

convergono uniformemente per x variabile in un intervallo chiuso interno rispettivamente agli intervalli:

$$\left(0, \frac{2\pi}{q}\right) \text{ per le (1)}; \qquad \left(0, \frac{\pi}{q}\right) \text{ per le (2)}; \qquad (-1, 1) \text{ per la (3)}.$$

Vogliamo subito rilevare che l'enunciato relativo alla prima delle serie in esame non rientra nelle proprietà note delle serie di DIRICHLET, in quanto esso è valido anche se la serie $\sum_1^\infty {}_n a_n$ non converge $\left(\text{p. es. } a_n = \frac{1}{n}\right)$. È noto che nelle ipotesi poste per i numeri λ_n la serie: $\sum_1^\infty {}_n a_n e^{\lambda_n z}$ ha l'ascissa di olomorfia e di convergenza coincidenti, e che sulla retta corrispondente (del piano della variabile complessa z) ogni segmento di lunghezza superiore a $\frac{2\pi}{q}$ contiene almeno un punto singolare per la serie [2]. Questo noto risultato negativo si accorda perfettamente con quello positivo che ci proponiamo di dimostrare; infatti la prima delle serie

[1] Per esempio entrambe le condizioni sono soddisfatte se la successione degli a_n è monotona infinitesima (anche solo a partire da un certo a_n).

[2] Cfr. V. BERNSTEIN, *Leçons sur les séries de Dirichlet*, (1933), pag. 140 dove però la tendenza al limite q non è supposta necessariamente monotona.

in esame non è che la citata serie di DIRICHLET considerata sull'asse immaginario puro, e di essa si è affermata la convergenza su certi segmenti di questo asse; ma mettendoci come si è detto nel caso in cui la $\sum_{1}^{\infty} {}_n\, a_n$ non converge, la nostra serie di DIRICHLET non converge in $z=0$, quindi la retta di convergenza non può che coincidere con l'asse immaginario puro; e quindi l'intervallo di variabilità dato nell'enunciato per la x corrisponde ad un segmento per la z situato proprio sulla retta di convergenza, e di lunghezza $\frac{2\pi}{q}$, cioè il massimo consentito.

Si vede quindi come i due risultati si accordino.

2. Riferiamoci anzitutto alle (1); è ovviamente sufficiente considerare le ultime due di queste tre serie.

Applichiamo il noto criterio per il quale se la $\Sigma\, u_n(x)$ ha le ridotte parziali uniformemente limitate e se gli a_n soddisfano alle condizioni dette in principio, la serie $\Sigma\, a_n u_n(x)$ converge uniformemente [3]. In base a questo criterio è sufficiente per il nostro scopo dimostrare che:

$$\left|\sum_{1}^{k} {}_n \cos(\lambda_n x)\right| < M \qquad \left|\sum_{1}^{k} {}_n \sin(\lambda_n x)\right| < M$$

con M indipendente da k e da x.

La limitazione supposta per x si può porre nella forma:

$$0 < \eta \leq x \leq \frac{2\pi}{q}(1-\vartheta) < \frac{2\pi}{q} \qquad \left(\text{con: } 0 < \vartheta < 1,\ 0 < \eta < \frac{2\pi}{q}(1-\vartheta)\right)$$

Siccome $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to q$, sopprimendo eventualmente un numero finito di termini della serie possiamo ridurci a considerare una serie in cui è $q(1-\vartheta) \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq q(1+\vartheta)$

Posto $\alpha_n = x(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ dalle disuguaglianze precedenti si ottiene: $\eta q(1-\vartheta) \leq \alpha_n \leq 2\pi(1-\vartheta^2)$ ossia tutti gli α_n sono compresi in un intervallo chiuso interno all'intervallo $(0, 2\pi)$ e quindi come si vede facilmente $\left|\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}}\right|$ è limitato indipendentemente da n e da x.

Consideriamo ora i vettori unitari $\bar{v} = \bar{v}(\lambda_n x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ che congiungono il centro di un cerchio unitario col punto in cui l'arco vale $\lambda_n x$; osserviamo che le loro proiezioni su due rette ortogonali di direzione opportuna valgono $\cos(\lambda_n x)$ e $\sin(\lambda_n x)$. Riportati suc-

(3) Cfr. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, (1935), pag. 3.

cessivamente altrettanti vettori ad essi uguali, a partire da un punto fisso 0, indichiamo con S la spezzata che così si ottiene.

Il vettore $\bar{v}(\lambda_{n+1}x)$ risulta rotato rispetto al procedente $\bar{v}(\lambda_n x)$ dell'angolo $\alpha_n = x(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$. Chiamiamo C_n il punto in cui si incontrano le normali condotte per i punti medi ai vettori unitari $\bar{v}(\lambda_n x)$ e $\bar{v}(\lambda_{n+1}x)$, i quali avranno da C_n la comune distanza: $\delta_n = \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}}$ definita anche in segno.

Ma essendo come si è visto $\left|\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2}}\right|$ limitato indipendentemente da n e da x, tali risultano pure i $|\delta_n|$.

I varii punti C_n formano un'altra spezzata S'.

Siccome $\alpha_n = x(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ varia monotonamente con n (cfr. le ipotesi), anche δ_n varia monotonamente (tenendo conto del segno), e quindi (osservando che C_n e C_{n-1}, situati entrambi sulla normale per il punto medio al vettore $\bar{v}(\lambda_n x)$, hanno da questo vettore le distanze δ_n e δ_{n-1}) risulta che i lati della spezzata S' hanno la lunghezza $\delta_n - \delta_{n-1}$ (per tutti i valori di n) oppure $\delta_{n-1} - \delta_n$ (per tutti i valori di n) secondo che i δ_n sono crescenti o decrescenti. Quindi tutta la spezzata S' da C_1 a C_n in ogni caso ha la lunghezza: $|\delta_n - \delta_1|$.

Da tutto ciò segue che la distanza del punto medio del vettore $\bar{v}(\lambda_n x)$ dall'origine 0 della spezzata S è minore di:

$$(\text{distanza di } \bar{v}(\lambda_n x) \text{ da } C_n) + (\text{lunghezza della } S' \text{ da } C_n \text{ a } C_1) +$$
$$+ (\text{distanza di } C_1 \text{ da } \bar{v}(\lambda_1 x)) + (\text{semilunghezza di } \bar{v}(\lambda_1 x)),$$

quindi è $< |\delta_n| + |\delta_n - \delta_1| + |\delta_1| + \frac{1}{2} \leq 2|\delta_n| + 2|\delta_1| + \frac{1}{2}$ ossia è limitata indipendentemente da n e da x essendo tali tutti i $|\delta_n|$ come si era visto.

In altre parole tutte le possibili spezzate S che si ottengono al variare di x, comunque proseguite, sono sempre interne a una determinata regione finita del piano.

Per giungere alla conclusione voluta basta proiettare la somma dei primi k vettori su due rette ortogonali di direzione opportuna ottendo così le $\sum_1^k {}_n \cos(\lambda_n x)$ e $\sum_1^k {}_n \sin(\lambda_n x)$ che risultano, come appunto si doveva dimostrare, in modulo limitate da un determinato numero M indipendente da k e da x.

3. Passando ora all'esame delle (2) notiamo che per dimostrarne l'uniforme convergenza è sufficiente dimostrare quella delle serie che si ottengono prendendo solo i termini di posto pari o solo quelli di posto dispari; ma queste serie sono del tipo delle (1) salvo che i numeri λ tendono ora monotonamente ad intervallarsi di $2q$ anzichè di q; è quindi evidente la loro uniforme convergenza nell'intervello $\left(0, \frac{\pi}{q}\right)$.

4. Dai risultati precedenti possiamo ora dedurre la convergenza annunziata della serie (3).

Ricordiamo intanto la nota formula di approssimazione asintotica [4]:

$$P_n(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\gamma}}\,\frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$\left(\text{valida per } \varepsilon \leq \gamma \leq \pi - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$.

Ponendo $\cos\gamma = x$ otteniamo che la ridotta k–esima della serie (3) è uguale a:

$$\sum_{1}^{k}{}_n\, a_n P_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sin\gamma}} \sum_{1}^{k}{}_n \frac{a_n}{\sqrt{n}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma\right] + \tag{4}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi \sin\gamma}} \sum_{1}^{k}{}_n \frac{a_n}{\sqrt{n}} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma\right] + \sum_{1}^{k}{}_n\, a_n \frac{N_n}{n^{3/2}}$$

con $|N_n| < M$ essendo M un conveniente numero positivo.

Dobbiamo dimostrare che tutte le somme al 2° membro della (4) convergono per $k \to \infty$ uniformemente rispetto a $x = \cos\gamma$ quando γ soddisfa alla limitazione $\varepsilon \leq \gamma \leq \pi - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, che corrisponde alla limitazione imposta nell'enunciato alla variabie x.

Dai risultati precedenti relativi alle serie (1) segue che in tali ipotesi sono uniformemente convergenti le serie:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma\right] \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_n \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma\right]$$

ma queste rimangono uniformemente convergenti anche dividendo i loro coefficienti a_n per $\sqrt{n}$ e ciò in base al criterio citato nella nota [3], infatti le serie scritte sopra essendo uniformente convergenti hanno certo le ridotte parziali uniformemente limitate, e i numeri $\frac{1}{\sqrt{n}}$ formano una successione del tipo di quella dei numeri a_n.

[4] Cfr. G. Vitali e G. Sansone, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, G. Sansone, parte II (1946), pag 187.

Inoltre si vede facilmente che converge anche la serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n a_n \frac{N_n}{n^{3/2}} \quad \text{con } |N_n| < M$$

Quindi convergono uniformemente tutte le somme che figurano al 2° membro della (4) come si doveva dimostrare.

Si osservi pure che soddisfacendo γ alla limitazione $\varepsilon \leq \gamma \leq \pi - \varepsilon$ i coefficienti che precedono le somme al 2° membro della (4) sono uniformemente limitati.

Ne risulta quindi l'uniforme convergenza della serie (3)

Per questa si può anche osservare che le ipotesi fatte sui numeri a_n sono eccessive: si vede subito che basta supporre che gli a_n siano in modulo equilimitati e che la successione $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ abbia variazione totale finita.