Bollettino Unione Matematica Italiana

Emilio Gagliardo

Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$ con $A(x) \geq 0$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 177–185.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_177_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$ con $A(x) \geq 0$.

Nota di EMILIO GAGLIARDO (a Genova).

Sunto - *Le note proposizioni* [1] *sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione proposta si stabiliscono solitamente formulando ipotesi sul limite (per* $x \to \infty$*) di funzioni come:* $A(x)$, $x^2A(x)$ *(quando* $A(x)$ *tende a zero), ... oppure sull'ordine di infinitesimo della stessa* $A(x)$.
Ci proponiamo di mostrare che risultati più precisi in condizioni più generali si possono ottenere in modo notevolmente semplice formulando ipotesi sull'esistenza degli integrali impropri delle dette funzioni.
Così facendo noi possiamo prendere in considerazione anche funzioni $A(x)$ *per le quali i limiti nominati non esistono, come ad esempio avviene solitamente quando nella funzione* $A(x)$ *compaiono a fattore funzioni trigonometriche. Se poi questi limiti esistono, da alcuni dei criteri che troveremo si deducono immediatamente gli analoghi già noti, come casi particolari.*

1. In ciò che segue sottintenderemo sempre: $A(x) \geq 0$ definita e continua per ogni valore finito di $x \geq x_0 > 0$.

In questo lavoro si dimostrano i seguenti teoremi:

[1] Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel Campo reale*, parte II, Cap. VII, § 4, (1949); e: G. SANSONE, *Studi asintotici sulle equazioni differenziali di secondo ordine*, « Rend. Seminario Mat. e Fis. di Milano », Vol. XV, (1941).

TEOREMA I. - *Se* $\int_{x_0}^{\infty} \mathrm{A(x)dx} = \infty$ *tutti gli integrali dell'equazione in esame sono oscillanti.*

TEOREMA II. - *Se* $\int_{x_0}^{\infty} \mathrm{A(x)dx} < \infty$, *se un integrale dell'equazione è oscillante* ([2]), *la successione dei suoi infiniti zeri:* $a_1 < a_2 < \dots$ *è tale che la serie* $\Sigma \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$ *risulta convergente,* ossia le mutue distanze tra gli zeri consecutivi crescono molto rapidamente.

TEOREMA III. - *Se* $\mathrm{A(x)} \geq \frac{1}{4\mathrm{x}^2}$, *posto* $\mathrm{B(x)} = \mathrm{A(x)} - \frac{1}{4\mathrm{x}^2} \geq 0$ *se* $\int_{x_0}^{\infty} \mathrm{xB(x)dx} = \infty$, *allora tutti gli integrali dell'equazione sono oscillanti* ([3]).

TEOREMA IV. - *Se un integrale dell'equazione non è oscillante, e ad esempio a partire dal suo ultimo zero si conserva positivo* ([4]), *esiste sempre finito (o nullo) il limite:* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\mathrm{y(x)}}{\mathrm{x}}$, *e precisamente si possono presentare tre casi:*

A): *La curva* y(x) *non ammette asintoti, e in tale caso si ha inoltre:* $\lim \mathrm{y(x)} = +\infty$; $\lim \frac{\mathrm{y(x)}}{\mathrm{x}} = \lim \mathrm{y'(x)} = \mathrm{c} \geq 0$;

B): *La curva* y(x) *ha per asintoto una parallela all'asse* x, *e si ha:* $\mathrm{y(x)} = \mathrm{c} - \varepsilon(\mathrm{x})$ *con* $\mathrm{c} > 0$ *ed* $\varepsilon(\mathrm{x}) \geq 0$ *monotono infinitesimo;* $\lim \mathrm{y(x)} = \mathrm{c} > 0$; $\lim \frac{\mathrm{y(x)}}{\mathrm{x}} = \lim \mathrm{y'(x)} = 0$;

C): *La curva* y(x) *ha per asintoto una retta non orizzontale e si ha:* $\mathrm{y(x)} = \mathrm{c_0 x} + \mathrm{c_1} - \varepsilon(\mathrm{x})$ *con* $\mathrm{c_0} > 0$ *ed* $\varepsilon(\mathrm{x}) \geq 0$ *monotono infinitesimo;* $\lim \mathrm{y(x)} = +\infty$; $\lim \frac{\mathrm{y(x)}}{\mathrm{x}} = \lim \mathrm{y'(x)} = \mathrm{c_0} > 0.$

TEOREMA V. - *Nella ipotesi del teorema precedente* ($\mathrm{y} > 0$) *se* $\int_{x_0}^{\infty} \mathrm{x^2 A(x)dx} = \infty$ *è da escludersi il caso* C);

([2]) Come può risultare dal successivo teorema.

([3]) Se invece $A(x) \leq \frac{1}{4x^2}$ come è noto nessun integrale è oscillante come segue dal confronto con l'equazione $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$ il cui integrale generale $y = \sqrt{x}(C_1 + C_2 \log x)$ non è oscillante.

([4]) Se si conserva negativo, restando l'equazione in esame soddisfatta quando si cambia segno alla soluzione, valgono ovviamente risultati simmetrici rispetto all'asse x.

se poi $\int_{x_0}^{\infty} \mathrm{x}A(\mathrm{x})d\mathrm{x} = \infty$ *è da escludersi anche il caso* B) *e quindi si ricade nel caso* A), *e inoltre è* $c = 0$.

Se invece $\int_{x_0}^{\infty} \mathrm{x}^2 A(\mathrm{x})d\mathrm{x} < \infty$ *è da escludersi il caso* A) *e quindi l'integrale* $y(\mathrm{x})$ *ammette la rappresentazione asintotica*: $y(\mathrm{x}) = a\mathrm{x} + b + \gamma(\mathrm{x})$ *con* $\gamma(\mathrm{x})$ *monotona infinitesima.*

2. Vogliamo anzitutto osservare come i noti risultati relativi al caso $\lim\limits_{x \to \infty} A(x) = 0$ seguono immediatamente da alcuni dei teoremi enunciati, come loro casi particolari, rilevando però con alcuni esempi che questi teoremi sono utili anche quando i noti criteri falliscono.

È facile riconoscere che il risultato di A. KNESER ([5]) per il quale se: $\lim x^2 A(x) > \frac{1}{4}$ gli integrali sono tutti oscillanti, è conseguenza del teorema III. Questo teorema ci permette però di asserire anche, ad esempio, che sono tutti oscillanti gli integrali delle equazioni corrispondenti alle funzioni: $A(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{k}{x^2 \log x}$ $(k>0)$ e: $A(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{k \sin^2 x}{x^2}$ $(k > 0)$ (valendo inoltre per i loro zeri il teorema II), mentre in questi esempi il risultato di KNESER non può servire perchè il limite di $x^2 A(x)$ vale $\frac{1}{4}$ o non esiste.

Inoltre il risultato del DINI per cui se $A(x) = 0(x^{-(3+\rho)})$, con $\rho > 0$, gli integrali ammettono la rappresentazione asintotica $y(x) = ax + b + \gamma(x)$ con $\gamma(x) \to 0$, e il risultato di D. CALIGO ([6]), se $A(x) \geq 0$ seguono come casi particolari dall'ultimo enunciato del teorema V e dal teorema IV. Questi teoremi contengono inoltre nuovi risultati e precisazioni.

Dal teorema I segue che sono tutti oscillanti gli integrali delle equazioni con: $A(x) = \sin^2 x$, e: $A(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ per le quali i noti criteri falliscono.

Il teorema II è applicabile ad es. all'equazione: $y'' + \frac{5}{4x^2} y = 0$

([5]) A. KNESER, *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen*, « Math. Ann. », 42, (1893), pp. 409-435.

([6]) D. CALIGO, *Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale* $y'' + A(x)y = 0$, « Boll. U. M. I. », (2), 3, (1941), pp. 286-295.

soddisfatta da: $y = \sqrt{x} \sin \log x$; gli infiniti zeri sono: $a_n = e^{n\pi}$, e la serie considerata nell'enunciato del teorema risulta effettivamente convergente.

L'equazione $y'' + \frac{\sin^2 x}{4x^2} y = 0$ per quel che si è osservato nella nota (3) ha tutti gli integrali non oscillanti; sono allora applicabili i teoremi IV e V: da quest'ultimo segue che ci troviamo nel caso A).

3. Dimostrazione del teorema I.

Intanto per ogni integrale $y(x)$ dell'equazione data si ha evidentemente:

$$y'(x) = y'(x_1) - \int_{x_1}^{x} A(t) y(t) dt \qquad (\text{con } x \geq x_1 \geq x_0) \tag{1}$$

Sia in $x_1 (\geq x_0)$ p. es. $y(x_1) > 0$.

Dimostriamo anzitutto che per qualche $x_2 \geq x_1$ è: $y'(x_2) < 0$.

Se infatti per assurdo fosse $y' \geq 0$ per ogni $x \geq x_1$ allora la y sarebbe non decrescente, ossia $y \geq y(x_1)$ per ogni $x \geq x_1$, e per la (1) si avrebbe:

$$y'(x) \leq y'(x_1) - y(x_1) \int_{x_1}^{x} A(t) dt \qquad (\text{con } x \geq x_1)$$

ma siccome per ipotesi l'integrale di $A(t)$ diverge per $x \to \infty$ ne seguirebbe che per x abbastanza grande, prevalendo il termine negativo, y' diventerebbe negativo contrariamente a quanto si è supposto per assurdo.

Bisogna quindi ammettere che esista qualche $x_2 \geq x_1$ in cui sia $y'(x_2) < 0$. Siamo ora in grado di dimostrare che per qualche $x_3 > x_1$ è $y(x_3) = 0$. Infatti se per assurdo y si conservasse sempre positivo a destra di x_1, dall'equazione stessa seguirebbe $y'' \leq 0$ (a destra di x_1) ossia la curva $y(x)$ dovrebbe (per $x \geq x_1$) stare tutta al di sotto di ogni sua tangente (7); ma si è dimostrato che per x_2 opportuno $\geq x_1$ è: $y'(x_2) < 0$ (e: $y(x_2) \geq 0$) ossia la tangente alla curva $y(x)$ nel punto di ascissa x_2 incontra l'asse x in un punto a destra di x_2, e quindi ancora prima dovrebbe incontrarlo la curva integrale dovendo essa rimanere tutta al di sotto di questa sua tangente.

(7) Più in generale una curva $f(x)$ non può mai passare al di sopra di un'altra curva $g(x)$ se in un punto x^* è: $f(x^*) \leq g(x^*)$, e: $f'(x^*) = g'(x^*)$, e per ogni x è: $f''(x) \leq g''(x)$. Infatti la differenza $f(x) - g(x)$, avendo derivata non crescente, e nulla in $x = x^*$, deve essere sempre ≤ 0 essendo tale in $x = x^*$.

Analogamente si ragiona supponendo $y(x_1) < 0$.

È così assicurata l'esistenza di uno e quindi infiniti zeri a destra di un qualunque $x_1 \geq x_0$ ove $y(x_1) \neq 0$ quindi ogni integrale non identicamente nullo è oscillante.

4. Dimostrazione del teorema II.

È sufficiente dimostrare che se gli infiniti zeri $a_1 < a_2 < \ldots$ di un integrale $y(x)$ sono tali che $\Sigma_n \dfrac{1}{a_{n+1} - a_n} = \infty$, è allora: $\int\limits_{x_0}^{\infty} A(x) \mathrm{d}x = \infty$.

Scriviamo la (1) con: $x_1 = a_n$ e: $x = a_{n+1}$

$$y'(a_{n+1}) - y'(a_n) = -\int_{a_n}^{a_{n+1}} A(x) y(x) dx$$

ma nei due zeri consecutivi a_n, a_{n+1} y' ha segni opposti, e nell'intervallo da essi limitato y ha segno costante, inoltre, come resta sottinteso, $A(x) \geq 0$, quindi possiamo scrivere:

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} A(x) \,|\, y(x) \,|\, dx = |\, y'(a_n) \,| + |\, y'(a_{n+1}) \,|\,.$$

Chiamiamo M_n il maggiore dei due numeri $|y'(a_n)|$ e $|y'(a_{n+1})|$ ($M_n > 0$ perchè solo la soluzione identicamente nulla - che escludiamo - può avere zeri multipli) ed R_n il rapporto tra il minore e il maggiore di essi ($0 < R_n \leq 1$).

Supponiamo ora ad esempio $y > 0$ nell'intervallo (a_n, a_{n+1}) è allora ivi (cfr. l'equazione) $y'' \leq 0$ e quindi (cfr. nota (7)) in questo intervallo la curva sta tutta al di sotto di ogni sua tangente e in particolare delle tangenti negli estremi dell'intervallo, le quali hanno coefficienti direttivi in modulo minori o eguali a M_n e quindi, in tutto l'intervallo, y è minore di $M_n(a_{n+1} - a_n)$.

Analogamente si ragiona supponendo $y < 0$ nell'intervallo detto. Se ne conclude che in ogni caso il rapporto tra $|\,y\,|$ ed $M_n(a_{n+1} - a_n)$ è minore di 1.

Da ciò e dalla uguaglianza precedente si ottiene:

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} A(x) dx > \frac{1}{M_n(a_{n+1} - a_n)} \int_{a_n}^{a_{n+1}} A(x) \,|\, y(x) \,|\, dx = \frac{|\, y'(a_n) \,| + |\, y'(a_{n+1}) \,|}{M_n(a_{n+1} - a_n)} =$$

$$= \frac{R_n + 1}{a_{n+1} - a_n} > \frac{1}{a_{n+1} - a_n}.$$

Ma per ipotesi la serie $\Sigma_n \dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}$ è divergente e quindi diverge anche la serie: $\Sigma_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} A(x)dx$ ossia è: $\int\limits_{x_0}^{\infty} A(x)dx = \infty$.

5. Dimostrazione del teorema III.

Ponendo $z(x) = \dfrac{y(x)}{\sqrt{x}}$ ove $y\,(x)$ è unintegrale dell'equazione data, è verificabile con una derivazione la seguente identità:

$$xz'(x) = x_1 z'(x_1) - \int\limits_{x_1}^{x} tB(t)z(t)dt \qquad (x \geq x_1 \geq x_0). \tag{2}$$

Le funzioni $y(x)$ e $z(x)(x \geq x_0 > 0)$ hanno gli stessi zeri; basterà quindi, per dimostrare il teorema, provare che la $z(x)$ ammette uno e quindi infiniti zeri a destra di un qualunque punto $x_1 \geq x_0$ ove sia $z(x_1) \neq 0$.

Sia ad esempio $z(x_1) > 0$. Dimostriamo anzitutto che per un opportuno $x_2 \geq x_1$ è $z'(x_2) < 0$.

Se infatti per assurdo fosse $z'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq x_1$ e quindi anche $xz'(x) \geq 0$, ragionando in modo analogo a quanto si è fatto per il teorema I, essendo $z(x)$ non decrescente, e tenendo conto delle ipotesi del teorema, al secondo membro della (2) dovrebbe prevalere, per x abbastanza grande, il termine negativo; e quindi il primo membro risulterebbe negativo, contrariamente a ciò che si è supposto per assurdo. È dunque $z'(x_2) < 0$; e quindi possiamo scrivere: $x_2 z'(x_2) < -c^2 < 0$.

Risulta ora assurdo che a destra di x_1 la $z(x)$ si conservi sempre positiva, perchè in tal caso dalla (2) seguirebbe $xz'(x)$ non crescente a destra di x_1, e tenendo conto del risultato precedente si avrebbe: $z'(x) < -\dfrac{c^2}{x}$ per ogni $x \geq x_2$ e quindi la curva $z(x)$ starebbe, a destra di x_2, tutta al di sotto della curva $f(x)$ integrale dell'equazione $f'(x) = -\dfrac{c^2}{x}$ ed avente in x_2 il medesimo valore iniziale $z(x_2)$, ossia della curva $f(x) = -c^2 \log x + c_1$ (c_1 opportuna) la quale scende al di sotto dell'asse x per x abbastanza grande. Così pure deve quindi avvenire per la curva $z(x)$. Analogamente si ragiona supponendo $z(x_1) < 0$.

6. Dimostrazione del teorema IV.

Dalla ipotesi di questo teorema: $y(x) > 0$ (per $x > x_1$) e dall'equazione stessa, segue: $y''(x) \leq 0$ (per $x > x_1$) ossia $y'(x)$ è monotona non crescente.

Possiamo anche precisare: $y'(x) \geq 0$. Infatti se in un punto fosse $y' < 0$, ripetendo l'ultima parte della dimostrazione del Teorema I ne seguirebbe l'esistenza di uno zero (a destra di x_1) in contraddizione con le ipotesi.

La funzione $y'(x)$ positiva (o identicamente nulla) monotona non crescente ammette allora un limite positivo o nullo per $x \to +\infty$. Invece la funzione $y(x)$, positiva con derivata positiva (o nulla), può avere limite positivo finito oppure infinito.

Se la funzione $y(x)$ ha limite finito sono ora evidenti tutte le proprietà enunciate nel teorema nel caso B). Se invece $y(x)$ ha limite infinito, per la regola di De l'Hospital $\frac{y(x)}{x}$ tende allo stesso limite di $y'(x)$ che come si è dimostrato esiste positivo o nullo. Se poi questo limite è positivo si potrà separare il caso C) dal caso A) qualora la curva $y(x)$ ammetta un asintoto.

Se l'asintoto esiste sono evidenti tutte le proprietà enunciate nel caso C) (Ricordando le proprietà dimostrate delle funzioni $y(x)$ e $y'(x)$).

7. Dimostrazione del teorema V.

Premettiamo la seguente Osservazione:

Se le tangenti di una curva $y(x)$ hanno per $x \to +\infty$ un coefficiente direttivo limite, m, e le loro intersezioni con l'asse y hanno un punto limite: $(0, n)$, allora la differenza $y(x) - (mx + n)$ tende a zero.

Dimostrazione: Fissato ε le dette intersezioni dovranno cadere per $x > N$ all'interno del segmento compreso tra i punti: $A(0.n - \varepsilon)$ e: $B(0, n + \varepsilon)$.

Se ora per un valore $x^* > N$ fosse $y(x^*) = mx^* + n + \varepsilon + h$ con $h > 0$, la curva $y(x)$ per $x \geq x^*$ resterebbe tutta al di sopra della retta r congiungente il punto B col punto: $(x^*, mx^* + n + \varepsilon + h/2)$ (infatti per scendere al di sotto di questa le tangenti della curva non potrebbero più incontrare l'asse y all'interno del segmento AB); inoltre le tangenti avrebbero coefficiente direttivo maggiore di quello della retta r, e allora il limite dei coefficienti direttivi non potrebbe essere m come invece si è supposto.

Se ne conclude: $y(x^*) \leq mx^* + n + \varepsilon$, e così analogamente: $y(x^*) \geq mx^* + n - \varepsilon$, (per ogni $x^* > N$). È così dimostrata la tesi.

Per dimostrare il teorema V ricordiamo che dalla ipotesi $y > 0$ segue (cfr. dimostrazione del teorema IV) $y'' \leq 0$, e: $y' \geq 0$ monotona non crescente (per $x > x_1$).

Ricordiamo anche l'ipotesi: $x > 0$.

Consideriamo ora la funzione: $y(x) - xy'(x)$ (la quale dà l'ordinata delle intersezioni con l'asse y delle tangenti della curva integrale). Essa avendo derivata positiva o nulla ($y'' \leq 0$, $x > 0$) è monotona non decrescente e quindi potrà per $x \to +\infty$ avere limite finito oppure divergere.

I due casi si presentano precisamente secondochè la curva $y(x)$ ha oppure non ha un asintoto (nel senso che si abbia: $y(x) = mx + n + \gamma(x)$ con $\gamma(x) \to 0$).

Infatti se la curva ha un asintoto, essendo $y'' \leq 0$ la curva deve stare tutta al di sotto delle sue tangenti le quali devono quindi avere coefficiente direttivo maggiore o eguale a quello ($= m$) dell'asintoto (altrimenti questo, a destra del punto di incontro con una tangente, non potrebbe più approssimare la curva) e quindi essendo: $y(x) = mx + n + \gamma(x)$, (con $\gamma(x) \to 0$), $y'(x) = m + \gamma'(x)$, deve essere: $\gamma'(x) \geq 0$ e allora la funzione (non decrescente) $y(x) - xy'(x) = n + \gamma(x) - x\gamma'(x) \leq n + \gamma(x) \to n$ è limitata superiormente ed ha quindi limite finito. Viceversa se questo limite esiste finito, esistendo pure il limite di $y'(x)$ (cfr. dimostrazione teorema IV) segue dall'Osservazione precedente che la curva $y(x)$ ammette un asintoto.

Concludendo nel caso A) è: $\lim\,[y(x) - xy'(x)] = +\infty$ nei casi B) e C) è invece: $\lim\,[y(x) - xy'(x)] = k \neq \infty$.

Da ciò e dalla identità (verificabile con una derivazione):

$$y(x) - xy'(x) - y(x_1) + x_1y'(x_1) = \int_{x_1}^{x} tA(t)y(t)dt = \int_{x_1}^{x} t^2A(t)\frac{y(t)}{t}\,dt \tag{3}$$

seguono immediatamente gli enunciati del teorema V: Nella prima ipotesi del teorema, supponendo vero per assurdo il caso C) e quindi: $\lim \dfrac{y(x)}{x} = c_0 > 0$ il terzo membro della (3) risulterebbe divergente mentre il primo membro nel caso C) deve convergere.

Nella seconda ipotesi (da cui segue la prima, e quindi si può intanto escludere il caso C)) supponendo vero per assurdo il caso B) e quindi $\lim y(x) = c > 0$, il secondo membro della (3) risulterebbe divergente mentre il primo membro nel caso B) deve convergere. Siamo quindi nel caso A); inoltre è precisamente $c = 0$ perchè se per assurdo fosse: $\lim y'(x) = \lim \dfrac{y(x)}{x} = c > 0$ si potrebbe, per x abbastanza grande, minorare $y(x)$ con $\dfrac{c}{2}x$, ma allora tenendo conto dell'ipotesi in esame: $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} xA(x)dx = \infty$, il secondo membro della (1) per $x \to +\infty$ tenderebbe a $-\infty$ mentre il primo membro deve tendere a $c \geq 0$.

Nella terza ipotesi, potendosi maggiorare $y(x)$ con $xy'(x_1) + y(x_1)$ (perche $y'(x)$ è monotona non crescente) il secondo membro della (3) non può divergere mentre il primo membro nel caso A) deve divergere.