
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MAURO PICONE

Maggiorazione di un polinomio di Legendre e delle derivate in un'ellisse a quello confocale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.3, p. 237-242.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_237_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Maggiorazione di un polinomio di Legendre e delle derivate in un'ellisse a quello confocale (*).

Nota di MAURO PICONE (a Roma).

Sunto. - Si osservano talune formole di maggiorazione per i moduli di un polinomio di LEGENDRE e delle sue derivate in un'ellisse a quello confocale e si dimostra che i massimi di essi sono tutti assunti nei vertici dell'ellisse e soltanto in questi punti.

Fissati, comunque, due punti distinti a e b del piano complesso $z = x + iy$ chiamo *polinomio di Legendre di fuochi a e b e di indice n* , il polinomio di grado n , definito dall'eguaglianza

$$(1) \quad P_n(z, a, b) = \frac{1}{n! (b-a)^n} \frac{d^n}{dz^n} [(z-a)^n (z-b)^n],$$

la quale attribuisce al polinomio un valore numerico indipendente dalla adottata unità di misura delle lunghezze. Per $a = -1$ e $b = 1$, esso si riduce al consueto polinomio

$$(2) \quad X_n(z) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n,$$

avendosi

$$(3) \quad P_n(z, a, b) = X_n\left(\frac{2z - a - b}{b - a}\right).$$

Ci si potrebbe dunque, in base alla (3), ben limitarsi alla considerazione dei polinomi $X_n(z)$, ma, come è talvolta utile sostituire la potenza $(z - z_0)^n$, alla z^n , così, gli enunciati di taluni teoremi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

riescono più espressivi quando vengano riferiti ai polinomi P_n anzichè agli X_n . Per esempio, il teorema di K. NEUMANN, concernente lo sviluppo di una funzione olomorfa in un campo ellittico di fuochi -1 e 1 ⁽¹⁾, in serie precedente per polinomi $X_n(z)$, acquista il seguente enunciato:

« Data una funzione $f(z)$, olomorfa in un campo C ⁽²⁾, fissati, comunque, due punti a e b del campo, tali che il segmento rettilineo (a, b) , ad essi terminato, sia contenuto in C , detto $C(a, b)$ il massimo campo ellittico di fuochi a e b , contenuto in C (che riuscirebbe tutto il piano qualora la $f(z)$ fosse intera), la $f(z)$ è sviluppabile in serie di polinomi di LEGENDRE $P_n(z, a, b)$, uniformemente convergente in ogni dominio (limitato) contenuto in $C(a, b)$ ».

Con questa piccola Nota mi propongo di indicare talune maggiorazioni per il polinomio $P_n(z, a, b)$, e per le derivate, nell'ellisse $E(a, b, \varepsilon)$, di fuochi a e b e di eccentricità ε , cioè nell'insieme (perfetto) luogo dei punti per cui

$$|z - a| + |z - b| \leq \frac{1}{\varepsilon} |b - a|,$$

che si riduce al segmento focale (a, b) , per $\varepsilon = 1$. Reputo, in proposito, non trascurabile il seguente teorema, qui dimostrato al n. 2:

TEOREMA. - Per $n > 0$, indichi k un numero intero, positivo o nullo, minore di n . In ogni ellisse $E(a, b, \varepsilon)$, confocale al polinomio $P_n(z, a, b)$, i massimi dei moduli del polinomio e delle derivate $P_n^{(k)}(z, a, b)$, sono assunti nei vertici dell'ellisse e soltanto in questi punti ⁽³⁾.

1. Immediata maggiorazione dedotta dalla (1). La derivazione del prodotto $(z - a)^n(z - b)^n$, fornisce, per ogni intero k , positivo o nullo,

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!(b - a)^n} \sum_{\nu=0}^{n+k} \binom{n+k}{\nu} \frac{d^\nu(z - b)^n}{dz^\nu} \frac{d^{n+k-\nu}(z - a)^n}{dz^{n+k-\nu}},$$

⁽¹⁾ Cioè, denotando ε una quantità positiva minore di uno, in un campo luogo dei punti per cui $|z + 1| + |z - 1| < 2/\varepsilon$.

⁽²⁾ Chiamo *campo* ogni insieme aperto di punti.

⁽³⁾ Il teorema mi risulta noto solo per $\varepsilon = 1$. Cfr., per es., i miei *Apunti d'Analisi Superiore*, Rondinella (Napoli), p. 257, della 1^a Ediz. (1940) e p. 333 della 2^a edizione (1946). ove trovasi una dimostrazione, però manchevole, del teorema nel caso particolare indicato.

e, per $0 \leq k \leq n$.

$$(4) \quad P_n^{(k)} = \frac{1}{n! (b-a)^n} \sum_{\nu=k}^n \binom{n+k}{\nu} (n, \nu) (n, n+k-\nu) (z-b)^{n-\nu} (z-a)^{\nu-k},$$

ove si è posto, per s intero, positivo o nullo

$$(n, s) \begin{cases} = n(n-1) \dots (n-s+1), & \text{per } n \geq 1 \text{ e } s \geq 1, \\ = 1 & , \text{ per } s = 0. \end{cases}$$

La (4), postovi $z = b$, dà, intanto

$$P_n^{(k)}(b, a, b) = \frac{1}{k! (b-a)^k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

ciò che, di solito, si ottiene, meno rapidamente, per altra via. La (4) può anche scriversi

$$\begin{aligned} P_n^{(k)} &= \frac{(n+k)!}{n! (b-a)^n} \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n}{\nu+k} \binom{n}{n-\nu} (z-b)^{n-k-\nu} (z-a)^{\nu} = \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \sum_{\nu=0}^{n-k} \frac{n!}{(\nu+k)! (n-\nu)!} \binom{n-k}{\nu} (z-b)^{n-k-\nu} (z-a)^{\nu}, \end{aligned}$$

donde, se s'indica con μ_{kn} il massimo fra i numeri

$$\frac{n!}{(\nu+k)! (n-\nu)!}; \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-k),$$

si pone cioè

$$\mu_{kn} \begin{cases} = n! / \left(\left(\frac{n+k-1}{2} \right)! \left(\frac{n+k+1}{2} \right)! \right), & \text{per } n-k \text{ dispari,} \\ = n! / \left(\left(\frac{n+k}{2} \right)! \right)^2 & , \text{ per } n-k \text{ pari,} \end{cases}$$

si ottiene la maggiorazione

$$|P_n^{(k)}| \leq \frac{\mu_{kn}}{|b-a|^n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} (|z-a| + |z-b|)^{n-k},$$

e, pertanto, nell'ellisse $E(a, b, \varepsilon)$,

$$|P_n^{(k)}| \leq \frac{\mu_{kn}}{|b-a|^k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{\varepsilon^{n-k}}.$$

Si ha dunque, per $k=0$,

$$P_n = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu}^2 (z-b)^{n-\nu} (z-a)^{\nu},$$

e, nell'ellisse $E(a, b, \varepsilon)$,

$$(5) \quad |P_n| \leq \frac{\mu_{0n}}{\varepsilon^n} \begin{cases} = n! / \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)! \left(\frac{n-1}{2} \right)! \varepsilon^n \right), & \text{per } n \text{ dispari,} \\ = n! / \left(\left(\frac{n}{2} \right)! \left(\frac{n}{2} \right)! \varepsilon^n \right) & , \text{ per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Nel cerchio concentrico all'ellisse $E(\varepsilon, a, b)$, avente per diametro l'asse maggiore di questa, e quindi anche nell'ellisse, si ha, altresì,

$$|P_n| \leq q_n \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)^n, \quad (4)$$

ove

$$q_n = \frac{(2n-1)!!}{n!} \quad (5).$$

Naturalmente riesce $q_n \leq \mu_{0n}$ ($q_n < \mu_{0n}$ per $n \geq 1$). Ma se si tiene conto delle eguaglianze

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\zeta_n)}}, \quad q_n = \frac{2^n}{\sqrt{\pi(n+\zeta_n)}},$$

ove ζ_n designa una certa quantità positiva e minore di $\frac{1}{2}$, subito si dimostra che

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{q_n}{\mu_{0n}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{2}{n}}.$$

Talchè si hanno pure, nell'ellisse E , le eleganti maggiorazioni

$$|P_n| \leq \frac{\sqrt{2}q_n}{\varepsilon^n} < \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^n.$$

2. Dimostrazione del teorema. — La frontiera $\mathfrak{E}$ dell'ellisse $E(a, b, \varepsilon)$, di eccentricità $\varepsilon (\leq 1)$, può rappresentarsi, parametricamente, ponendo

$$(6) \quad z = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \left(\rho e^{i\vartheta} + \frac{1}{\rho} e^{-i\vartheta} \right),$$

(4) Cfr. la mia nota: *Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate* (questo Bollettino, marzo 1953) e la nota di A. COLUCCI: *Generale maggiorazione dei polinomi e delle derivate e una sua conseguenza* (in questo stesso fascicolo). Si dimostra facilmente che, nel detto cerchio, valgono pure le maggiorazioni:

$$|P_n^{(k)}| \leq \frac{(n, k) q_n (2\varepsilon)^k}{(b-a)^k} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right)^n \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

(5) Porremo sempre, in questo scritto, per ogni intero n , positivo o nullo

$$\begin{aligned} (2n-1)!! & \begin{cases} = 1, & \text{per } n=0, \\ = (2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1, & \text{per } n \geq 1, \end{cases} \\ (2n)!! & \begin{cases} = 1, & \text{per } n=0, \\ = 2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2, & \text{per } n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

ove ρ è la radice non minore di uno dell'equazione

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \frac{2}{\varepsilon},$$

ed il parametro $\varkappa$ varia da 0 a 2π . Posto

$$(7) \quad \zeta = \frac{2z - a - b}{b - a}$$

si ha, su $\mathcal{E}$,

$$(8) \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\vartheta} + \frac{1}{\rho} e^{-i\vartheta} \right)$$

e

$$P_n^{(k)}(z, a, b) = \frac{2^k}{(b - a)^k} X_n^{(k)}(\zeta).$$

Per ogni $\rho_0 > 1$, indicheremo con $G(\rho_0)$ l'ellisse del piano ζ , luogo dei punti rappresentati dalla (8), per cui

$$1 \leq \rho \leq \rho_0, \quad 0 \leq \varkappa \leq 2\pi,$$

i vertici della quale si hanno per $\rho = \rho_0$, $\varkappa = 0$ e $\rho = \rho_0$, $\varkappa = \pi$, e corrispondono a quelli della E , mediante la (7). La funzione

$$(9) \quad (1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

è funzione olomorfa delle variabili complesse α e ζ , per ζ nel dominio $G(\rho_0)$ e $|\alpha| \leq \alpha_0$, ove α_0 è una quantità positiva tale da risultare

$$(10) \quad \alpha_0 \left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \right) + \alpha_0^2 < 1.$$

Si ha allora, invero, con $|\zeta| \leq \frac{1}{2} \left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \right)$, $| - 2\alpha\zeta + \alpha^2 | \leq$
 $\alpha_0 \left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \right) + \alpha_0^2 < 1.$

La funzione (9), per ζ in $G(\rho_0)$ e $|\alpha| \leq \alpha_0$ è sviluppabile in serie doppia totalmente convergente di monomi interi in α e in ζ , i termini della quale, contenenti il fattore α^n , ($n = 0, 1, \dots$), hanno per somma il prodotto $X_n(\zeta)\alpha^n$. Ne segue, in virtù del teorema di WEIERSTRASS,

$$\frac{d^k}{d\zeta^k} (1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(k)}(\zeta)\alpha^n,$$

cioè, tenendo conto, per $\rho \leq \rho_0$, della (8),

$$(11) \quad (2k-1)!!(1-\alpha\rho e^{i\vartheta})^{-\frac{2k+1}{2}}\left(1-\frac{\alpha}{\rho}e^{-i\vartheta}\right)^{-\frac{2k+1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_{k+\nu}^{(k)}(\zeta)\alpha^{\nu}.$$

Ma risultando, in base alla (10), $|\alpha\rho| \leq \alpha_0\rho_0 < 1$, $\left|\frac{\alpha}{\rho}\right| \leq |\alpha| \leq \alpha_0 < 1$, si ha anche

$$(1-\alpha\rho e^{i\vartheta})^{-\frac{2k+1}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ks}\rho^s e^{is\vartheta}\alpha^s,$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\rho}e^{-i\vartheta}\right)^{-\frac{2k+1}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ks}\frac{e^{-is\vartheta}}{\rho^s}\alpha^s,$$

con

$$p_{ks} = \frac{(2k+2s-1)!!}{(2s)!!(2k-1)!!},$$

e con convergenza totale delle serie scritte, donde, dalla (11), segue

$$\frac{1}{(2k-1)!!} X_{k+\nu}^{(k)}(\zeta) = \sum_{s+t=\nu} p_{ks}p_{kt}\rho^{s-t}e^{i(s-t)\vartheta},$$

e quindi, per qualsivoglia intero μ , positivo o nullo,

$$(12) \quad X_{k+2\mu}^{(k)}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\mu} a_{k\mu}^{(s)} \left(\rho^{2s} e^{i2s\vartheta} + \frac{e^{-i2s\vartheta}}{\rho^{2s}} \right),$$

$$(13) \quad X_{k+2\mu+1}^{(k)}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\mu} b_{k\mu}^{(s)} \left(\rho^{2s+1} e^{i(2s+1)\vartheta} + \frac{e^{-i(2s+1)\vartheta}}{e^{2s+1}} \right),$$

ove $a_{k\mu}^{(s)}$ e $b_{k\mu}^{(s)}$ sono certi numeri razionali positivi. Si ha dunque

$$(14) \quad |X_{k+2\mu}^{(k)}(\zeta)| \leq \sum_{s=0}^{\mu} a_{k\mu}^{(s)} \left(\rho^{4s} + \frac{1}{\rho^{4s}} + 2\cos 4s\vartheta \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(15) \quad |X_{k+2\mu+1}^{(k)}(\zeta)| \leq \sum_{s=0}^{\mu} b_{k\mu}^{(s)} \left(\rho^{4s+2} + \frac{1}{\rho^{4s+2}} + 2\cos(4s+2)\vartheta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il massimo M , in $G(\rho_0)$, del secondo membro della (14) si ha soltanto per $\rho = \rho_0$ e $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = \pi$, e del secondo membro della (15) per $\rho = \rho_0$ e $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$. Esso ha il valore di $|X_{k+\nu}^{(k)}(\zeta)|$ nei vertici di $G(\rho_0)$, nei quali le $X_{k+\nu}^{(k)}(\zeta)$ sono reali. Poichè, d'altra parte, come risulta dalla (12).

$$\left| X_{k+2\mu}^{(k)}(\zeta) \right|_{\substack{\rho=\rho_0 \\ \vartheta=\frac{\pi}{2}}} = \left| \sum_{k=0}^{\mu} (-1)^s a_{k\mu}^{(s)} \left(\rho_0^{2s} + \frac{1}{\rho_0^{2s}} \right) \right| < M,$$

il teorema è dimostrato.