BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CAPRIOLI

Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari con il metodo di Cimmino.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 8
(1953), n.3, p. 260–265.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_260_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari con il metodo di Cimmino.

Nota di LUIGI CAPRIOLI (a Bologna).

Sunto. - *Si espone un semplice criterio di impiego mediante il quale il metodo di CIMMINO può prestarsi ad una razionale utilizzazione delle macchine calcolatrici.*

1. Introduzione. - È ben noto, e del resto ovvio, che la attitudine di un procedimento di iterazione al calcolo numerico in generale e, in particolare, a quello delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari, non dipende soltanto dal numero delle operazioni richieste per conseguire una data approssimazione, ma anche dalla semplicità e rapidità di esecuzione di esse con i mezzi di cui si dispone. Può così verificarsi il fatto che il maggior numero di operazioni richieste da un metodo di calcolo possa essere compensato dalla maggiore semplicità di esecuzione di esse.

Oggetto di quanto è qui di seguito esposto è di illustrare come un semplice artificio possa rendere il metodo di iterazione di CIMMINO particolarmente idoneo ad un proficuo impiego delle calcolatrici, risultando così compensata la lentezza di convergenza del metodo stesso. Appare così affatto non giustificato, o comunque assai azzardato, il ritenere, come si fa da qualche Autore ⁽¹⁾, che il procedimento in oggetto non possa essere utilmente impiegato in pratica.

2. Sia dato il sistema di equazioni lineari

$$(1) \quad \sum_1^n a_{hk} x_k = b_h \quad (h = 1, 2, 3, \dots, n);$$

si può dimostrare ⁽²⁾ che se la caratteristica della matrice $\|a_{hk}\|$ è maggiore di uno, le quantità

$$(2) \quad x_k^{(\nu)} = x_k^{(\nu-1)} - \frac{2}{\sum_1^n m_h} \sum_1^n m_h a_{hk} \frac{\sum_1^n a_{hi} x_i^{(\nu-1)} - b_h}{\sum_1^n a_{hi}^2}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

dove gli m_h sono n numeri positivi arbitrari, convergono per $\nu \rightarrow \infty$ verso una soluzione ξ_k del sistema (1) ⁽³⁾. Sotto la ulteriore condizione che sia diverso da zero il determinante $|a_{hk}|$, sussiste poi la relazione

$$(3) \quad \delta_\nu^2 \leq (1 - \rho)^\nu \delta_0^2$$

nella quale si è posto

$$(4) \quad \delta_\nu^2 = \sum_1^n (x_k^{(\nu)} - \xi_k)^2,$$

$$\delta_0^2 = \sum_1^n (x_k^{(0)} - \xi_k)^2,$$

mentre si è indicata con ρ la più piccola radice caratteristica della forma (quadratica definita positiva) nelle $(x_k^{(\nu-1)} - \xi_k)$:

$$(5) \quad \frac{2}{\sum_1^n m_h^2} \sum_1^n \sum_1^n m_h m_i (\chi_k^2 + \chi_i^2 - 2\theta_{hi} \chi_h \chi_i),$$

⁽¹⁾ Cfr. E. BODEWIG, *Bericht über die verschiedenen Methoden zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten*, IV «Kon. Nederlandsche Akad. Van Wetenschappen.» Pubblic. dell'I. N. A. C. n. 234, Roma, 1948.

⁽²⁾ Cfr. G. CIMMINO, *Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari*, «Ricerca Scientifica», Serie II, Anno IX, Vol. I.

⁽³⁾ La successione $x_k^{(\nu)}$ converge anche nel caso che le (1) siano incompatibili; ma, evidentemente, ciò è del tutto inessenziale dal punto di vista numerico.

essendo

$$(6) \quad \chi_r = \frac{\sum_1^n a_{ri}(x_i^{(v-1)} - \xi_i)}{\sqrt{\sum_1^n a_{ri}^2}}, \quad \theta_{hi} = \frac{\sum_1^n a_{hi} a_{li}}{\sqrt{\sum_1^n a_{hi}^2} \sqrt{\sum_1^n a_{li}^2}}.$$

La (3) può fornire una limitazione superiore per lo « errore globale » δ_v ⁽⁴⁾ della n -pla di quantità $x_k^{(v)}$ ottenute al v -esimo stadio del procedimento di iterazione, in funzione dell' « errore iniziale » δ_0 della n -pla arbitraria $x_k^{(0)}$ ⁽⁵⁾.

3. La convergenza delle (2) essendo indipendente dalla scelta delle n quantità m_h , può assumersi

$$(7) \quad m_h = \sum_1^n a_{hj}^2;$$

con ciò la (2) prende la forma seguente, evidentemente più atta al calcolo numerico che non la (2) stessa:

$$(8) \quad x_k^{(v)} = x_k^{(v-1)} - \frac{2}{\sum_1^n a_{hk}^2} \sum_1^n a_{hk} \sum_1^n a_{hi} (x_i^{(v-1)} - \xi_i).$$

Assunta ora una arbitraria n -pla di quantità $y_k^{(v-1)}$ ed un numero positivo p , per ora indeterminato, consideriamo le espressioni

$$(9) \quad y_k^{(v)} = y_k^{(v-1)} - p \sum_1^n a_{hk} \left(\sum_1^n a_{hi} y_i^{(v-1)} - b_h \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

e proponiamoci di vedere se, e sotto quali condizioni, le $y_k^{(v)}$ convergano verso una soluzione ξ_k del sistema (1). A tale scopo quadriamo e sommiamo m. a m., rispetto a k (da 1 ad n) le relazioni

$$(y_k^{(v)} - \xi_k) = (y_k^{(v-1)} - \xi_k) - p \sum_1^n a_{hk} \sum_1^n a_{hi} (y_i^{(v-1)} - \xi_i);$$

detti P_{v-1} , P_v i punti dello spazio ad n dimensioni le cui coordinate sono rispettivamente (con riferimento ad un sistema carte-

(4) Tale errore globale può assumersi come valore maggiorante degli errori da cui sono affette le valutazioni $x_k^{(v)}$.

(5) La valutazione numerica delle quantità δ_0 , ρ , è, in generale assai lunga e laboriosa; talchè conviene spesso rinunciarvi, a meno che non siano note, per altra via, determinazioni anche approssimate della quantità δ_0 . È questo, invero, un inconveniente notevole; ma comune, del resto, a tutti i procedimenti di questo tipo.

siano ortogonale con origine nel punto $O \equiv (\xi_k) y_k^{(v-1)}, y_k^{(v)}$; e posto

$$(10) \quad \psi_{hl} = \frac{\sum_1^n a_{hk} a_{lh}}{\sqrt{\sum_1^n a_{hk}^2} \sqrt{\sum_1^n a_{lh}^2}},$$

$$(11) \quad \omega_m^{(v-1)} = \frac{\sum_1^n a_{mz} (y_z^{(v-1)} - \xi_z)}{\sqrt{\sum_1^n a_{mz}^2}},$$

si ottiene la relazione

$$(12) \quad \overline{OP}_v^2 = \overline{OP}_{v-1}^2 - p^2 \sum_1^n \sum_{kl} a_{kl}^2 \sum_1^n a_{hk}^2 \sum_1^n a_{lh}^2 \left[-\omega_h^{(v-1)} \omega_l^{(v-1)} \psi_{hl} + \frac{p[\omega_h^{(v-1)}]^2}{\sum_1^n a_{hk}^2} + \frac{p[\omega_l^{(v-1)}]^2}{\sum_1^n a_{lh}^2} \right].$$

Ora, per essere $p > 0$, la

$$(13) \quad \psi_{hl} - \frac{4p^2}{\left(\sum_1^n a_{kh}^2\right)^2} \leq 0$$

è condizione sufficiente affinchè la forma

$$-\omega_h^{(v-1)} \omega_l^{(v-1)} \psi_{hl} + \frac{p[\omega_h^{(v-1)}]^2}{\sum_1^n a_{hk}^2} + \frac{p[\omega_l^{(v-1)}]^2}{\sum_1^n a_{lh}^2} \equiv Q_{hl}^{(v-1)}$$

sia non negativa e che si abbia pertanto

$$(14) \quad OP_v^2 \leq OP_{v-1}^2.$$

Osserviamo inoltre che nella precedente il segno uguale può sussistere soltanto se sono tutte nulle le $Q_{hl}^{(v-1)}$; e ciò richiederebbe (supposte non tutte nulle le $\omega_m^{(v-1)}$) che fosse verificata la (13) col segno uguale; dovrebbe cioè aversi, per tutte le coppie h, l :

$$\sum_1^n a_{hk} a_{lk} = c,$$

con

$$c = \frac{2p \sqrt{\sum_1^n a_{hk}^2} \sqrt{\sum_1^n a_{lh}^2}}{\sum_1^n a_{hk}^2};$$

ma ciò è contrario alla ipotesi che sia > 1 la caratteristica della matrice $\|a_{hk}\|$. Risulta così dimostrato che, sotto questa ultima ipotesi, è sempre

$$(15) \quad OP_v^2 < OP_{v-1}^2.$$

Segue quindi ⁽⁶⁾ che le $y_k^{(v)}$ convergono, per $v \rightarrow \infty$, verso la soluzione ξ_k del sistema, condizione sufficiente per tale convergenza essendo la (13), che può scriversi nella forma

$$(16) \quad \sum_1^n a_{hk} a^2_{hk} \leq \frac{2p}{|\psi_{hl}|_{max}},$$

dove con $|\psi_{hl}|_{max}$ si è indicato il più grande dei numeri $|\psi_{hl}|$: o nelle altre, più restrittive, ma delle quali è più facile la verifica

$$(17) \quad \sum_1^n a_{hk} a^2_{hk} \leq 2p \quad (?),$$

$$(18) \quad \sum_1^n a_{lk} a_{hk} < \frac{2p}{n} \quad (?).$$

4. È ora quasi superfluo far rilevare la opportunità, dal punto di vista dell'effettivo impiego del procedimento in oggetto, di assumere $p = 1$; posto infatti:

$$(19) \quad z_h^{(v-1)} = - \left[\sum_1^n a_{hs} z_s^{(v-1)} - b_h \right],$$

la (9) assume la forma

$$(20) \quad y_k^{(v)} = y_k^{(v-1)} + \sum_1^n a_{hk} z_h^{(v-1)}$$

e le (16), (17), (18) si scrivono rispettivamente

$$(16') \quad \sum_{hk} a^2_{hk} \leq \frac{2}{|\psi_{hl}|_{max}}$$

$$(17') \quad \sum_{hk} a^2_{hk} \leq 2$$

$$(18') \quad \sum_k a_{lk} a_{hk} \leq \frac{2}{n}.$$

Le (19), (20) si prestano ad un assai semplice e razionale impiego delle calcolatrici, anche di tipo comune: i calcoli richiesti dalle (19), (20) si riducono, infatti, a somme di prodotti di due fattori; ed è ben nota la buona attitudine delle calcolatrici, anche se di tipo corrente, ad eseguire con relativa rapidità tali tipi di operazioni.

⁽⁶⁾ Cfr. G. CIMMINO, loc. cit.

⁽⁷⁾ E, infatti, qualunque sia la coppia h, l : $|\psi_{hl}| \leq 1$.

⁽⁸⁾ Basta osservare che è $\sum_1^n a^2_{hk} \leq n \sqrt{\sum_k a^2_{hk}} \sqrt{\sum_k a^2_{lk}}$, per riconoscere che la (18) è condizione sufficiente affinché sia verificata la (13)

La lentezza di convergenza del procedimento di iterazione oggetto di queste osservazioni può pertanto ritenersi notevolmente compensata dalla rapidità con cui possono essere ottenute, anche con calcolatrici elettriche, le successive approssimazioni. La evidente analogia delle operazioni suggerite dalle (19), (20) fa inoltre prevedere che risulti assai semplice la predisposizione dei programmi di lavoro nelle più moderne calcolatrici elettroniche.

Non è inutile osservare, infine, che la condizione (17'), (o la (16'), o la (18'), rispettivamente meno e più restrittiva) implica, sì, un "lavoro di preparazione,, del sistema stesso; ma che tale lavoro è evidentemente di mole assai limitata, dato il carattere soltanto qualitativo delle condizioni precitate e la rapidità di calcolo delle espressioni che figurano ai primi membri.