Bollettino Unione Matematica Italiana

Ermanno Marchionna

Sulle proiezioni delle varietà intersezioni complete di due ipersuperficie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 265–268.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_265_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sulle proiezioni delle varietà intersezioni complete di due ipersuperficie.

Nota di Ermanno Marchionna (a Milano).

Sunto. - *Si assegnano condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'ipersuperficie* Γ *di uno spazio* S_{r-1} *sia proiezione di una varietà* Γ^* (*di* S_r) *intersezione completa di due forme*: *per* $r=3$ *tali condizioni precisano e completano un classico teorema di* Halphen.

1. In un precedente lavoro [1] ho caratterizzato le varietà V_d (a d dimensioni) intersezioni complete e prive di V_{d-1} multiple, enunciando e dimostrando le seguenti proposizioni:

I) Nello spazio S_r una curva gobba irriducibile Γ^*, priva di punti multipli, d'ordine $n=n_1 \cdot n_2 \dots \cdot n_{r-1}$ e genere

$$p=\frac{1}{2}n(n_1+n_2+\dots+n_{r-1}-r-1)+1,$$

risulta intersezione completa di $r-1$ forme di S_r degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$, se (almeno) un gruppo sezione di Γ^* con un iperpiano Π è intersezione completa di $r-1$ forme (di Π) degli stessi ordini delle precedenti.

II) Una varietà Γ_{r-d} di S_r (ad $r-d>1$ dimensioni), irriducibile e priva di varietà multiple ad $r-d-1$ dimensioni, risulta

[1] Cfr Marchionna E., *Varietà intersezioni complete e varietà di diramazione*, «Rend. Ist. Lombardo», 85, 1952.

intersezione completa di d forme degli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_d$ se la sua sezione con un (generico) iperpiano Π è intersezione completa di d forme (di Π) degli stessi ordini delle precedenti ([2]).

Queste due proposizioni permettono di dimostrare — come ora si vedrà — delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè una ipersuperficie Γ di uno spazio S_{r-1} sia proiezione di una varietà Γ^* — di S_r — intersezione completa di due forme degli ordini μ e ν.

2. Si stabilisce in proposito il

TEOREMA - *Condizione affinchè un' ipersuperficie* Γ *d'ordine* $\mu\nu$ — appartenente ad uno spazio Π ad $r-1$ dimensioni — *sia proiezione* (da un punto generico) *di una varietà* Γ^* (priva di varietà multiple $(r-3)$-dimensionali) *intersezione completa di due forme degli ordini* μ *e* ν (appartenenti ad uno spazio S_r passante per Π) *è che*:

a) *La varietà doppia* D (ad $r-3$ dimensioni) *della* Γ *abbia ordine*

$$\delta = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$$

e sia situata sopra una forma f_l (*di* Π) *d'ordine*

$$l = (\mu-1)(\nu-1):$$

b) *esista una subaggiunta* f_{l+1} (*di* Γ) ([3]), *la quale abbia ordine* $l+1$ *e tagli* Γ (fuori di *D*) *secondo una varietà* G *intersezione completa di due ipersuperficie* (di Π) *degli ordini* μ *e* ν.

Nella nota citata in (1) ho già verificato che la condizione *a*) è necessaria ([4]); il fatto che risulti tale anche la condizione *b*) segue

([2]) È sufficiente che la suesposta proprietà sia verificata per *un* particolare iperpiano, soggetto alla sola condizione di tagliare Γ_{r-d} secondo una varietà irriducibile priva di varietà multiple ad $r-d-2$ dimensioni.

Facciamo notare che la proposizione II) è più significativa, anche se in sostanza equivalente, del teorema di JONGMANS: «Nello spazio S_r una varietà V_{r-d} (priva di V_{r-d-1} multiple) è intersezione completa di d forme, se la curva sezione di V_{r-d} con un generico spazio S_{d+1} è pure intersezione completa di d forme». Cfr. JONGMANS F., «*Contribution à la théorie des variétés algébriques*», Mém. Société Scien. Liège, IV, 7 (1947).

([3]) Per subaggiunta di Γ s'intende abitualmente una forma di Π passante per la varietà doppia *D* (ad $r-3$ dimensioni).

([4]) Anzi nella stessa nota la condizione a) appare da sola anche sufficiente quando siano soddisfatte opportune ipotesi di generalità (precisate nel lavoro citato in ([7])).

dalla circostanza che le subaggiunte d'ordine $l+1$ della Γ segano su questa (fuori di D) un sistema lineare completo che contiene le proiezioni delle ∞' varietà G^* sezioni iperpiane dèlla Γ^* [5].

Infatti le varietà G^* sono intersezioni complete di due forme (del loro iperpiano) aventi ordini μ e ν (ciò perchè Γ^* è per ipotesi intersezione totale di due forme di S_r degli stessi ordini delle precedenti); pertanto se si proietta su Π una varietà G^* — contenuta in un iperpiano non passante per il centro di proiezione — si ottiene appunto una varietà G (della Γ) intersezione completa di due forme (di Π) degli ordini μ e ν.

Si noti che l'enunciazione della condizione b) è fatta con lo scopo di dare una condizione non solo necessaria ma anche, e sopratutto, sufficiente. Da quanto precede si deduce che come condizione necessaria si poteva dire: « tutte le subaggiunte d'ordine $l+1$ (non spezzate nella f_l ed in un iperpiano) tagliano Γ secondo varietà G intersezioni complete di due ipersuperficie degli ordini μ e ν » (condizione, questa, più significativa).

Dimostriamo ora che le condizioni a) e b) sono anche sufficienti.

Riferiamo lo spazio S_r ad un sistema di coordinate omogenee $x_1, x_2, \dots, x_r, z$ in modo che l'iperpiano Π abbia equazione $z=0$, ed indichiamo con Γ, f_l, f_{l+1} tanto le varietà che compaiono nell'enunciato quanto i polinomi (nelle coordinate omogenee di $\Pi: x_1, x_2, \dots x_r$) che uguagliati a zero ne danno le rispettive equazioni.

Ciò posto, si vede subito che la varietà Γ^* (ad $r-2$ dimensioni) data dalla rappresentazione monoidale

$$\Gamma=0\,; \qquad z=\frac{f_{l+1}}{f_l}$$

ha ordine $\mu\nu$, è priva di varietà multiple $(r-3)$ — dimensionali, ed ammette come proiezione su Π — eseguita dal punto fondamentale $Z(0, 0, \dots, 1)$ — la varietà Γ dell'enunciato.

Si vede anche che la sezione di Γ^* con l'iperpiano Π $(z=0)$ è la varietà G che la subaggiunta f_{l+1} taglia su Γ fuori della varietà doppia D.

A questo punto — tenendo conto del fatto che G è per ipotesi intersezione completa di due forme (di Π) degli ordini μ e ν — si può affermare che Γ^* è intersezione totale di due forme (di S_r) pure degli ordini μ e ν.

Ciò risulta ovvio — in base alla proposizione II) del paragrafo 1 — se Γ^* è una varietà di dimensione $d>1$ (cioè per $r>3$); ed è vero anche se Γ^* è una curva (il che avviene per $r=3$).

[5] Basta per questo pensare ad una particolare subaggiunta d'ordine $l+1$ spezzata in un iperpiano (di Π) e nella subaggiunta f_l dell'enunciato, la quale non interseca Γ fuori della varietà doppia D.

Infatti, poichè in tal caso la proiezione Γ di Γ^* è una curva piana dotata di

$$\delta = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1)$$

punti doppi (si ricordi per questo la condizione a)), Γ^* ha effettivamente genere

$$p = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) + 1.$$

È quindi lecito applicare la proposizione I) del paragrafo 1 e concludere che la curva Γ^* è intersezione completa di due superficie degli ordini μ e ν.

Il Teorema resta così completamente dimostrato.

3. Per il caso $r = 3$, il risultato ora stabilito fornisce un completamento di un classico teorema di Halphen, teorema che contiene un elemento d'incertezza che andava eliminato. L'enunciato di Halphen è in sostanza il seguente:

« Una curva gobba (dello spazio ordinario) d'ordine $\mu\nu$, avente una proiezione piana d'ordine $\mu\nu$ con i punti doppi situati sopra una curva d'ordine $(\mu - 1)(\nu - 1)$, è intersezione completa di due superficie degli ordini μ e ν *salvo il caso in cui essa appartenga ad una superficie d'ordine minore di* μ *e* ν (6) ».

È abbastanza facile a vedersi che — sempre per $r = 3$ — la proposizione dimostrata nel paragrafo 2 potrebbe essere verificata anche in base al teorema di Halphen. Basta osservare che la condizione a) permette l'applicazione immediata di questo teorema, e la condizione b) esclude la circostanza che Γ^* appartenga ad una superficie d'ordine minore di μ e ν.

Ricordiamo infine che — sotto opportune ipotesi di generalità — la condizione b) è una conseguenza della a); esistono però dei casi (eccezionali) in cui la b) è effettivamente indipendente dalla a) (7).

(6) Cfr. Halphen, *Classification des courbes gauches algébriques*, Journal de l'Ecole Polithecnique. 72 cahier, 1882.

(7) Cfr. E. Marchionna, *Precisazioni su un'estensione di un teorema di Halphen*, Rend. Ist. Lombardo, *86*, 1953.

Quì si vedrà che dalla sola condizione a) segue *l'appartenenza* di Γ^* a due forme degli ordini μ e ν (generalmente irriducibili); tuttavia queste possono avere talvolta in comune anche una forma d'ordine minore di μ e ν passante per Γ^* (ed allora Γ^* non risulta intersezione completa). Un effettivo esempio dei casi eccezionali ora indicati mi è stato segnalato (per $r = 3$, $\mu = 7$, $\nu = 6$) dal Prof. Andreotti.