Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Aymerich

Un teorema di unicità sulle onde elettromagnetiche guidate da un guscio anisotropo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 273–276.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_273_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Un teorema di unicità sulle onde elettromagnetiche guidate da un guscio anisotropo.

Nota di Giuseppe Aymerich (a Cagliari).

Sunto. - *Si dimostra il teorema enunciato all'inizio del paragrafo 2.*

1. Generalizzando la nozione di *guscio elicoidale* di cui ci siamo occupati in un recente lavoro [1], per *guscio conduttore anisotropo* intendiamo una superficie che in ogni suo punto conduce l'elettricità in una sola direzione (tangente alla superficie), generalmente variabile, con continuità, da punto a punto. Come avviene per il guscio elicoidale, un qualsiasi guscio anisotropo si può pensare come caso limite del sistema ottenuto ricoprendo una superficie mediante fili metallici vicini tra loro ma non intersecantisi, quando si faccia crescere indefinitamente il numero dei fili e nello stesso tempo si faccia tendere a zero il loro raggio.

In questo lavoro dimostriamo un teorema di unicità sul campo elettromagnetico armonico guidato da un guscio anisotropo cilindrico, a «fili» perfettamente conduttori, di sezione semplicemente connessa e di forma qualsiasi. Esso presenta una certa analogia con un teorema dato recentemente da D. Graffi sul campo elettromagnetico sostenuto da una superficie perfettamente conduttrice isotropa [2]. Naturalmente nel nostro caso, poichè il flusso del vet-

(6) Cfr. «Verslag. Wiss. Ak. Wetenschappen», Amsterdam, 15, 1906, p. 423-9.

(1) *Sulle onde elettromagnetiche guidate da una superficie cilindrica perfettamente conduttrice isotropa*, «Rendiconti del Sem. Mat. di Padova», vol. XXII (1953), pp. 158-177.

(2) D. Graffi, *Un teorema di unicità per le equazioni di* Maxwell *e sue applicazioni alla teoria delle guide d'onda*, «Memorie dell'Acc. delle Sc. dell'Istituto di Bologna», (10) VII, (1950-51). Tale teorema è stato successivamente esteso da M. De Socio, nella nota: *Un teorema sul campo elettromagnetico*, «Boll. U. M. I.», (3) VII, pag. 423-427.

tore di POYNTING attraverso un guscio anisotropo è generalmente diverso da zero, occorre considerare insieme al campo interno anche quello esterno, che invece non interviene nel caso di un dominio limitato da un conduttore isotropo.

2. Il teorema che vogliamo dimostrare è il seguente:

« *Un campo elettromagnetico armonico sostenuto da un guscio cilindrico anisotropo, con sezione semplicemente connessa, a "fili„ perfettamente conduttori e non paralleli all'asse* [3], *immerso in un mezzo (anche lievemente) conduttore, è univocamente determinato nella regione infinita compresa tra due piani perpendicolari all'asse, se su questi piani sono date le componenti normali del vettore elettrico e del vettore magnetico e se questi all'infinito sono infinitesimi di ordine* $\alpha > 1$ ».

Osserviamo innanzitutto che la componente normale del vettore di POYNTING di un campo elettromagnetico qualsiasi è continua attraverso un guscio anisotropo perfettamente conduttore.

Siano infatti $\boldsymbol{n}$ il versore della normale al guscio in un suo generico punto M, orientata ad es. verso l'esterno, $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ il versore della direzione di conduzione in M ed $\boldsymbol{a}_{\perp}$ il versore perpendicolare ad $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ e ad $\boldsymbol{n}$ orientato in modo che la terna $(\boldsymbol{a}_{\perp}, \boldsymbol{a}_{\parallel}, \boldsymbol{n})$ risulti antioraria.

Detti $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ il vettore elettrico e quello magnetico ed indicate rispettivamente con $(\boldsymbol{E}^i, \boldsymbol{H}^i)$ ed $(\boldsymbol{E}^e, \boldsymbol{H}^e)$ le loro determinazioni sulle due faccie, interna ed esterna. del guscio, per proprietà ben note si ha

$$E^i_{\parallel} = E^e_{\parallel} = 0, \tag{1}$$

$$E^i_{\perp} = E^e_{\perp} \tag{2}$$

$$H^i_{\parallel} = H^e_{\parallel} \tag{3}$$

essendo ovviamente $E_{\parallel} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a}_{\parallel}$, etc.

Per la (1) si ha:

$$\boldsymbol{E}^i \wedge \boldsymbol{H}^i \times \boldsymbol{n} = E^i_{\perp} H^i_{\parallel},$$
$$\boldsymbol{E}^e \wedge \boldsymbol{H}^e \times \boldsymbol{n} = E^e_{\perp} H^e_{\parallel}$$

da cui per le (2) e (3) segue:

$$\boldsymbol{E}^i \wedge \boldsymbol{H}^i \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}^e \wedge \boldsymbol{H}^e \times \boldsymbol{n}$$

Ciò premesso, diciamo π_1 e π_2 i piani nominati nell'enunciato, D tutta la regione compresa tra questi piani e σ la parte del guscio appartenente a D. Siano $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ ed $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{e}, \boldsymbol{H} + \boldsymbol{h})$ i vettori complessi che rappresentano due eventuali campi elettromagnetici armonici rispetto al tempo, soddisfacenti alle condizioni del teorema

[3] Rimane così escluso il cosidetto guscio a tubi.

enunciato. I vettori e ed h verificano le equazioni di MAXWELL nella regione D all'interno ed all'esterno del guscio; ed inoltre, per quanto si è visto, la componente normale del relativo vettore di POYNTING è continua attraverso σ. Assunto allora l'asse z parallelo all'asse del guscio e diretto da π_1 a π_2, consideriamo il dominio D', contenente σ, avente per contorno la superficie cilindrica a sezione circolare σ', di asse z, ed i due cerchi Γ_1 e Γ_2 determinati dalle intersezioni dei piani π_1 e π_2 con σ. Applicando in tale dominio [4] il teorema di POYNTING nella forma usuale per i campi armonici si ha:

$$(4) \qquad \int_{\sigma'} e \wedge h^* \times n' d\sigma' - \int_{\Gamma_1} e \wedge h^* \times k d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} e \wedge h^* \times k d\Gamma_2 + \\ + j\omega \int_{D'} (\mu h \times h^* - \varepsilon e \times e^*) dD + \gamma \int_{D'} e \times e^* dD' = 0,$$

essendo e^* ed h^* i vettori complessi coniugati di e e di h, n' il versore della normale a σ' e k il versore dell'asse z, j l'unità immaginaria, ω la pulsazione, μ, ε e γ la permeabilità magnetica, la costante dielettrica e la conduttività del mezzo.

Per l'ipotesi fatta sul comportamento del campo all'infinito è facile convincersi che al tendere ad infinito del raggio di σ' tutti gli integrali che intervengono nella (4) convergono e che, in particolare, l'integrale superficiale esteso a σ' tende allo zero.

Mostriamo che anche gli integrali superficiali estesi a Γ_1 ed a Γ_2 tendono a zero. Fissata l'attenzione sul piano π_1 e detta s_1 la sua intersezione col guscio σ, poichè su tal piano risulta $e_z = h_z = 0$. con considerazioni analoghe a quelle svolte da GRAFFI nella memoria citata si vede che, esclusi i punti di s_1, può scriversi

$$e = \text{grad}\, \varphi, \qquad h = \text{grad}\, \psi,$$

essendo φ e ψ due funzioni di x ed y, monodrome e continue in tutto il piano esclusa la linea s_1, dove eventualmente presentano una discontinuità di prima specie [5]. Ed è facile riconoscere che

[4] Si tenga presente che non avendo il vettore $e \wedge h^*$ discontinuità normali il teorema della divergenza vale nella forma ordinaria (v. ad es. GRAFFI, *Teoria matematica dell'Elettromagnetismo,* Pàtron, Bologna, 1949, p. 53).

[5] Poichè il vettore e, per la (1) e la (2), ed il vettore h, per la (3) e per il fatto che $h_z = 0$ su π_1, hanno componenti tangenziali continue attraverso la linea s_1, φ e ψ sono continue oppure presentano discontinuità

φ e ψ possono essere supposte infinitesime all'infinito di ordine $\alpha - 1$ [6]. Pertanto si può scrivere

$$e \wedge h^* \times k = \operatorname{div}(\psi^* \operatorname{grad} \varphi \wedge k) = \operatorname{div}(\psi^* e \wedge k).$$

Il vettore $\psi^* e \wedge k$ è discontinuo attraverso la linea s_1, ma la sua componente secondo la normale (nel piano π_1) è continua. Infatti, detto t il versore della tangente alla linea s_1 in un suo generico punto M, sia e^i che e^e, che per la (1) appartengono al piano $(n, a_\perp)$, saranno diretti secondo l'intersezione di questo piano con π_1 ossia secondo la n, perpendicolare a t. Nel punto M si ha allora per il campo interno e per quello esterno

$$\psi^* e \wedge k \times n = \psi^* e \times t = 0.$$

Nel cerchio Γ_1 è perciò applicabile il teorema della divergenza al campo vettoriale (piano) $\psi^* e \wedge k$ e, detta C_1 la circonferenza di Γ_1, si ha

$$\int_{\Gamma_1} \operatorname{div} (\psi^* e \wedge k) \, d\Gamma_1 = \int_{C_1} \psi^* e \times t \, ds$$

da cui, poichè l'integrale lineare tende allo zero al tendere ad infinito del raggio r di Γ_1,

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\Gamma_1} e \wedge h^* \times k \, d\Gamma_1 = \lim_{r \to \infty} \int_{C_1} \psi^* e \times t \, ds = 0.$$

Ragionando analogamente per il piano π_2 e ritornando alla (4), si deduce che

$$j\omega \int_D (\mu h \times h^* - \varepsilon e \times e^*) \, dD + \gamma \int_D e \times e^* \, dD = 0,$$

e da questa, essendo il primo integrale una quantità immaginaria pura e il secondo una quantità reale, si trae che $e \equiv 0$ e quindi anche $h \equiv 0$.

costanti attraverso la linea s_1 (v. ad es. BURGATTI, *Sulle discontinuità delle funzioni scalari e vettoriali e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie*, «Memorie scelte», Zanichelli, Bologna 1951, pag. 193). Quanto precede non può dirsi per il guscio a tubi.

[6] v. GRAFFI, *op. cit.* alla nota (4) pag. 286, le quali considerazioni si trasportano immediatamente ai campi piani.