Bollettino
Unione Matematica Italiana

Maria Teresa Vacca

Determinazione asintotica per $n \to \infty$ degli estremi relativi dell' n^{esimo} polinomio di Jacobi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 277–280.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_277_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Determinazione asintotica per $n \to \infty$ degli estremi relativi dell' n^{esimo} polinomio di Jacobi.

Nota di MARIA TERESA VACCA (a Torino)

Sunto. - *Si dimostra che i limiti del prodotto di $n^{-\alpha}$ per gli «ultimi» estremi relativi di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ coincidono, a meno di un fattore, con i «primi» estremi di $J_\alpha(z)$, cioè coi valori di questa funzione in corrispondenza ai primi zeri di $J_{\alpha+1}(z)$ a partire dall'origine.*

1. In due Note, apparse di recente in questo Bollettino ([1]), sono stati studiati e determinati i limiti per $n \to \infty$ degli estremi relativi dei polinomi di LEGENDRE. Scopo di questa nota è l'analoga determinazione per i generali polinomi di JACOBI definiti dalla formula:

$$(1) \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\left(-n,\, n+\alpha+\beta+1,\, \alpha+1\,;\, \frac{2z}{2k+z}\right)$$

ove

$$x = 1 - \frac{4z}{2k+z}.$$

2. Anzitutto occorre determinare (asintoticamente) le ascisse in cui si verificano gli estremi di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, cioè gli zeri di

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(x)$$

che indicheremo con $x_{r,n}$, $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ essendo

$$1 > x_{1,n} > x_{2,n} > \ldots > x_{n-1,n} > -1.$$

In un lavoro di F. G. TRICOMI ([2]) si trova una formula: la (25) che permette appunto di determinare gli «ultimi» zeri di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Basta anzi tener conto del solo primo termine della (25) che,

([1]) G. VILLARI. *Sugli estremi relativi dei polinomi di Legendre*, Vol. (3) 7 (1952) p. 421-423.

F. G. TRICOMI. *Determinazione dei limiti per $n \to \infty$ degli estremi relativi dell' n^{esimo} polinomio di Legendre*, Vol. (3) *8* (1953).

([2]) *Expansion of the Hypergeometric Function in Series of Confluent Ones and Application to the Jacobi Polynominals*, Comm. Math. Helvetici. *25* (1951), 196-204.

essendo ora α mutato in $\alpha+1$, β in $\beta+1$, n in $n-1$, fornisce (per r fisso)

$$x_{r,n} = 1 - \frac{j^2_{\alpha+1,r}}{2\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2} + 0(n^{-4}), \tag{2}$$

avendo indicato con $j_{\alpha+1,r}$ l' r^{esimo} zero (a partire dall' origine) della funzione di BESSEL $J_{\alpha+1}(z)$.

3. Per calcolare il valore di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ corrispondente ad $x = x_{r,n}$ occorre servirsi anche delle (10) e (11) dell'ultimo lavoro citato, da cui si deduce che

$$F\left(-n,\ n+\alpha+\beta+1,\ \alpha+1\,;\ \frac{2z}{2k+z}\right) = \tag{3}$$

$$= \left(1+\frac{z}{2k}\right)^{n+\alpha+\beta+1} e^{-\frac{z}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} C_p\left(\frac{z}{2}\right)^p$$

ove

$$C_p(z) = \Gamma(\alpha+1)\sum_{m=0}^{p} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_m}{k^m} A_m\left(k,\ \frac{\alpha+1}{2}\right) \times$$

$$\times A_{p-m}\left(k'+\frac{m}{2},\ \frac{\alpha+1+m}{2}\right) E_{c+p-1}\left[\left(k'+\frac{m}{2}\right)z\right],$$

essendo

$$k = n + \frac{\alpha+1}{2}; \qquad k' = n + \frac{\alpha+1}{2} + \beta = k+\beta;$$

$$|z| < 2|k|; \qquad E_\nu(z) = z^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{z})$$

e gli A_m certi coefficienti determinati da una relazione ricorrente che non occorre qui riportare.

In particolare si ha

$$\begin{aligned} & C_0(z) = \Gamma(\alpha+1) E_\alpha(k'z) \\ (4)\qquad & C_1(z) = 0 \\ & C_2(z) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2}\left\{E_{\alpha+2}(k'z) + \frac{(n+\alpha+\beta+1)_2}{k^2} E_{\alpha+2}[(k'+1)z]\right\}. \end{aligned}$$

Introducendo la funzione di BESSEL di prima specie $J_\nu(z)$, in luogo della funzione uniforme $E_\nu(z)$, le precedenti formule assumono la forma

$$\begin{aligned} & C_0(z) = \Gamma(\alpha+1)(k'z)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{k'z}) \\ (5)\qquad & C_1(z) = 0 \\ & C_2(z) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2}\left\{(k'z)^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} J_{\alpha+2}(2\sqrt{k'z}) + \right. \\ & \qquad \left. + \frac{(n+\alpha+\beta+1)_2}{k^2}[(k'+1)z]^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} J_{\alpha+2}(2\sqrt{(k'+1)z})\right\}. \end{aligned}$$

Dalla (1), (3) e (6) si deduce che

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{n!}\left(1+\frac{z}{2k}\right)^{n+\alpha+\beta+1} e^{-\frac{z}{2}} \Big\{ (k'z)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{k'z}) +$$

$$+ \frac{\alpha+1}{8} z^{1-\frac{\alpha}{2}} \Big[(k')^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} J_{\alpha+2}(2\sqrt{k'z}) +$$

$$+ \frac{(n+\alpha+\beta+1)_2}{k^2}(k'+1)^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} J_{\alpha+2}(2\sqrt{(k'+1)z}) \Big] + \dots \Big\}$$

donde segue che

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{n!}\left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+\alpha+\beta+1} e^{-k\frac{1-x}{3+x}} \Big\{ (k'z)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{k'z}) +$$

$$+ \frac{\alpha+1}{8}(k'z)^{1-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{J_{\alpha+2}(2\sqrt{k'z})}{k'^2} + \frac{(n+\alpha+\beta+1)_2}{k^2 k'^2}\left(1+\frac{1}{k'}\right)^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} J_{\alpha+2}(2\sqrt{(k'+1)z}) + \dots \right\}.$$

Posto $\xi = k'z$ ossia

$$\xi = 2\left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(n+\frac{\alpha+1}{2}+\beta\right)\frac{1-x}{3+x} \tag{6}$$

risulta

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{n!}\left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+\alpha+\beta+1} e^{-\frac{\xi}{2(n+\beta)+\alpha+1}} \Big\{ \xi^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{\xi}) + 0(n^{-2}) \Big\}. \tag{7}$$

Ma d'altra parte è

$$\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(1+n)} = n^\alpha[1+0(n^{-1})];$$

quindi la (7) può anche scriversi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n^\alpha\left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+\alpha+\beta+1} e^{-\frac{\xi}{2(n+\beta)+\alpha+1}} \Big\{ \xi^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{\xi}) + 0(n^{-1}) \Big\}. \tag{8}$$

Per $x = x_{r,n}$ la (6) fornisce:

$$\frac{\xi}{2(n+\beta)+\alpha+1} = \frac{j^2_{\alpha+1,r}}{8\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2}\left[n+\frac{\alpha+1}{2}+0(n^{-1})\right],$$

mentre d'altra parte si ha

$$\log\frac{4}{x+3} = \frac{j^2_{\alpha+1,r}}{8\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2}[1+0(n^{-2})].$$

Pertanto si può scrivere che

$$\left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+\alpha+\beta+1} e^{-\frac{\xi}{2(n+\beta)+\alpha+1}} = \exp\left\{\frac{j^2_{\alpha+1,\,r}}{8\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2}\left[-n-\frac{\alpha+1}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+n+\alpha+\beta+1+0(n^{-1})\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{j^2_{\alpha+1,\,r}}{8\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2}\left[\frac{\alpha+1}{2}+\beta+0(n^{-1})\right]\right\}$$

e se ne conclude che la precedente espressione tende a 1 per $n \to \infty$.

Inoltre dalla (6) risulta che

$$\lim_{n\to\infty} \xi = \lim_{n\to\infty} \frac{j^2_{\alpha+1,\,r}}{4}\left[\frac{\left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(n+\frac{\alpha+1}{2}+\beta\right)}{\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2}+0(n^{-2})\right] = \frac{j^2_{\alpha+1,\,r}}{4}.$$

Dunque dalla (8) si deduce infine che

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x_{r,\,n})\right] = \left(\frac{j_{\alpha+1,\,r}}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(j_{\alpha+1,\,r})\,.$$

È questa la ben semplice formula che fornisce i valori dei limiti che volevansi determinare.

Notiamo ancora che, servendosi della nota formula

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\,\alpha)}(x)$$

e del fatto che, di conseguenza, con ovvie notazioni si ha

$$x^{(\alpha,\,\beta)}_{n-r,\,n} = -\,x^{(\beta,\,\alpha)}_{r,\,n}\,,$$

la precedente formula, scambiando fra loro α e β, può adattarsi anche alla determinazione asintotica dei «primi» estremi di $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$. Precisamente risulta che

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n n^{-\beta}P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x_{n-r,\,n})\right] = \left(\frac{j_{\beta+1,\,r}}{2}\right)^{-\beta} J_\beta(j_{\beta+1,\,r})\,.$$