Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tristano Manacorda

Studio di un circuito non lineare col metodo stroboscopico di N. Minorsky.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 281–285.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_281_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Studio di un circuito non lineare col metodo stroboscopico di N. Minorsky.

Nota di TRISTANO MANACORDA (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra, applicando il metodo stroboscopico di* N. MINORSKY, *che un particolare sistema non lineare è capace di compiere autoscillazioni per effetto parametrico. Si determina l'ampiezza delle oscillazioni e se ne constata la stabilità.*

1. Il Prof. N. MINORSKY ha introdotto in questi ultimi anni [1] un metodo, da lui chiamato stroboscopico, per la ricerca di soluzioni periodiche dei sistemi non lineari quasi armonici dipendenti esplicitamente dal tempo, cioè descritti da equazioni del tipo

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t) \quad \text{con} \quad \mu \ll 1. \tag{1}$$

La ricerca di soluzioni periodiche con lo stesso periodo delle oscillazioni non lineari è ricondotta, con un opportuno artificio, a quella dei punti singolari di un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, appunto le *equazioni stroboscopiche.* Ciò è ottenuto operando col procedimento delle differenze finite sul sistema alle variazioni di POINCARÉ dell'equazione data, e poi riducendo con l'introduzione della cosidetta *variabile stroboscopica,* il sistema così ottenuto di nuovo ad un sistema di equazioni differenziali, al quale, per l'assenza esplicita del tempo, è lecito applicare il metodo di POINCARÉ per la ricerca dei punti singolari e considerare nello stesso tempo la stabilità delle soluzioni.

All' Istituto Matematico dell' Università di Firenze, dove si potè ascoltare l'esposizione del metodo da parte dello stesso Prof. MINORSKY, sono state iniziate ricerche per estendere il metodo stroboscopico, che, nonostante la sua natura parzialmente euristica notevolissime ed importanti applicazioni, ad equazioni di tipo più generale della (1) e che spesso si presentano nelle applicazioni. Mentre tali ricerche sono tuttora in corso, è parso non privo di interesse applicare il metodo stroboscopico allo studio di un sistema non lineare, il quale, benchè sia stato uno dei primi ad essere studiato sperimentalmente per mettere in evidenza il cosidetto effetto parametrico e rimanga uno dei più notevoli in tale ge-

[1] Cfr. ad es. N. MINORSKY: *Sur la méthode stroboscopique,* « Mem. Acc. Sc. di Bologna », 10, IX, (1952), 23-29.

nere di ricerche [2], non sembra sia stato ancora preso in esame col metodo del Prof. MINORSKY. Si tratta di un circuito in cui la non linearità è rappresentata da una autoinduzione a nucleo di ferro e l'effetto parametrico insorge per la variazione sinusoidale col tempo di una capacità. Come proveremo nel n. 4, il sistema è in grado di compiere *oscillazioni con periodo doppio di quello della capacità e tali oscillazioni sono stabili.*

Si tratta dunque di un esempio tipico di oscillazioni eteroparametriche in cui il metodo di MINORSKY permette subito di determinare l'ampiezza delle oscillazioni e la loro stabilità nonchè le condizioni che permettono l'autoeccitazione.

Si osserva infine che alla stessa equazione di moto, e quindi alle medesime conclusioni, si arriva quando si considerino le oscillazioni di un pendolo la cui lunghezza vari periodicamente col tempo.

2. Un circuito elettrico sia costituito da una capacità C, una resistenza R ed una autoinduzione a nucleo di ferro. L'equazione del sistema è

$$C\dot{\Phi} + CRi + \int i dt = 0 \tag{2}$$

in cui Φ è il flusso di induzione magnetica nel nucleo. Supponiamo che C vari col tempo con la legge

$$C = C_0(1 + \lambda \cos \Omega t), \tag{3}$$

in cui λ è una costante positiva molto piccola in confronto all'unità. Supporremo anche R piccola dell'ordine di λ, in modo da poter porre $R = r\lambda$, $r > 0$.

La relazione non lineare tra i e Φ può essere scritta, almeno per valori non troppo grandi di i [3],

$$i = A\Phi + B\Phi^3,$$

con A e B costanti positive, e B molto piccolo in confronto ad A. Dovendosi applicare metodi approssimati, supporremo anche qui B/A dell'ordine di λ in modo da porre $B/A = b\lambda$, con $b > 0$, e quindi:

$$i = A(\Phi + b\lambda\Phi^3). \tag{4}$$

(2) Cfr. ad es.: L. MANDELSTAM, N. PAPALEXI, ecc.: *Exposé des recherches récentes sur les oscillations non-linéaires* « Journ. Techn. Phys. (U. S. S. R.) », 2, 2, 81-134.

(3) Cfr. N. MINORSKY: *Non-linear Mechanics*, « Ann. Arbor, » 1947, p 192.

Con ciò, derivando la (2) rispetto al tempo e tenendo conto della (3) e (4) si arriva all'equazione non lineare:

$$(5)\quad \ddot{\Phi} + \frac{A}{C_0}\Phi = -\lambda[Ar - \Omega \operatorname{sen}\Omega t + \ldots]\dot{\Phi} - \frac{A}{C_0}\lambda[b\Phi^3 - \Phi\cos\Omega t + \ldots]$$

in cui i termini non scritti tra parentesi sono almeno dell'ordine di λ. Cambiando nella (5) la variabile indipendente t in $t\sqrt{\frac{A}{C_0}}$ si arriva all'equazione

$$(6)\quad \begin{gathered} \Phi'' + \Phi = -\lambda[r\sqrt{AC_0} - \omega_0 \operatorname{sen}\omega_0 t + \ldots]\Phi' - \lambda[b\Phi^3 - \Phi\cos 2t + \ldots], \\ \omega_0 = \Omega\sqrt{\frac{C_0}{A}}, \end{gathered}$$

che differisce dai tipi già studiati sostanzialmente per la modulazione del coefficiente di Φ'.

Il metodo stroboscopico ha per fine la ricerca di soluzioni della (6) che, in prima approssimazione, abbiano lo stesso periodo delle oscillazioni di ordine zero. In tale ricerca hanno importanza fondamentale i termini secolari che appaiono al secondo membro della (6). Come è facile vedere, e come è ben noto ([4]), tali termini compaiono già nella prima approssimazione solo se $\omega_0 = 2$. Supporremo perciò d'ora in poi tale condizione verificata. Essa equivale a

$$\Omega = 2\sqrt{A/C_0}.$$

3. La (6) è equivalente al sistema

$$(7)\quad \begin{aligned} \Phi' &= \Psi \\ \Psi' &= -\Phi - \lambda[r\sqrt{AC_0} - 2\operatorname{sen} 2t + \ldots]\Psi - \lambda[b\Phi^3 - \Phi\cos 2t + \ldots]. \end{aligned}$$

Ricorriamo a coordinate polari ponendo

$$\Phi = \rho\cos\theta, \qquad \Psi = \rho\operatorname{sen}\theta.$$

Con ciò le (7) divengono

$$(8)\quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\lambda\rho\operatorname{sen}^2\theta[r\sqrt{AC_0} - 2\operatorname{sen}2t] - \lambda\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta[b\rho^2\cos^2\theta - \cos 2t], \\ \frac{d\theta}{dt} &= -1 - \lambda\operatorname{sen}\theta\cos\theta[r\sqrt{AC_0} - 2\operatorname{sen}2t] - \lambda[b\rho^2\cos^4\theta - \cos^2\theta\cos 2t], \end{aligned}$$

([4]) Cfr. N. Minorsky: *Parametric excitation*, «Journ. Appl. Physics», *22*, 49-54, (1951), n. 3.

a meno di termini dell'ordine di λ^2. Se si pone: $\rho = \rho_0 + \lambda\rho_1 + \dots$, $\theta = \theta_0 + \lambda\theta_1 + \dots$ si ottiene immediatamente

$$\rho_0 = \text{costante}, \qquad \theta_0 = -t + \gamma$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= -\rho_0 \operatorname{sen}^2\theta_0[r\sqrt{AC_0} - 2\operatorname{sen} 2t] - \rho_0 \operatorname{sen}\theta_0[b\rho_0^2 \cos^3\theta_0 - \cos\theta_0 \cos 2t] \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -\operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0[r\sqrt{AC_0} - 2\operatorname{sen} 2t] - \cos^2\theta_0[b\rho_0^2 \cos^2\theta_0 - \cos 2t]. \end{aligned}$$

Integrando le (9) tra 0 e 2π, si ottiene, per le variazioni di ρ_1 e di θ_1 in tale intervallo, l'espressione

$$\Delta\rho_1 = -2\pi\rho_0 \left[\frac{r_0\sqrt{AC_0}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\gamma\right], \quad \Delta\theta_1 = -2\pi\frac{3}{8}b\rho_0^2 + 2\pi\frac{1}{4}\cos 2\gamma.$$

Ora si ha $\Delta\rho = \lambda\Delta\rho_1$, $\Delta\theta = -2\pi + \lambda\Delta\theta_1$ e si viene così a formare un sistema di equazioni alle differenze finite che permetterebbero di calcolare ρ e θ a intervalli di tempo $\Delta t = 2\pi$. Ma se si tiene conto che λ è molto piccola, e quindi molto piccolo risulta anche $\Delta\tau = \lambda\Delta t = 2\pi\lambda$, che figura a fattore nei secondi membri di $\Delta\rho$ e $\Delta\theta$, si può al sistema sostituire, nell'ambito delle approssimazioni adottate, il sistema di equazioni differenziali

$$(10) \qquad \frac{d\rho}{d\tau} = -\rho\left[\frac{r\sqrt{AC_0}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\gamma\right], \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{3}{8}b\rho^2 + \frac{1}{4}\cos 2\gamma$$

in cui figura il *tempo stroboscopico* τ.

Le eventuali soluzioni periodiche in t col periodo in prima approssimazione, 2π, devono avere ampiezza e fase tali da annullare i secondi membri delle (10). Si ottiene così

$$\operatorname{sen} 2\gamma = -2r\sqrt{AC_0}, \qquad \cos 2\gamma = -\frac{3}{2}b\rho^2$$

e quindi

$$(11) \quad \bar\rho^2 = \frac{2}{3b}\sqrt{1 - 4r^2AC_0}, \quad \operatorname{tang} 2\bar\gamma = \frac{2r\sqrt{AC_0}}{\sqrt{1-4r^2AC_0}}, \quad \frac{\pi}{2} < \bar\gamma < \frac{3\pi}{4}.$$

che danno l'ampiezza e la fase delle oscillazioni stazionarie purché

$$(12) \qquad r\sqrt{AC_0} < 1/2.$$

4. Occorre ancora vedere se la soluzione (11) è stabile. Formiamo a questo scopo le equazioni alle variazioni delle (10) ponendo $\rho = \bar\rho + \xi$, $\gamma = \bar\gamma + \eta$. Otteniamo

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{1}{2}\bar\rho\cos 2\bar\gamma\,\eta, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{3}{4}b\bar\rho\,\xi + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\bar\gamma\,\eta$$

la cui equazione caratteristica è

$$S^2 + r\sqrt{AC_0}\,S + \frac{1}{4}(1 - 4r^2AC_0) = 0.$$

Le radici di questa equazione hanno in ogni caso, tenuto conto della (12), parte reale negativa. Ne segue che il punto singolare delle (10) definito dalle (11) è o un nodo o un fuoco stabile, e la soluzione periodica (11) è perciò stabile nel senso di LIAPOUNOFF.

Per completare il calcolo occorre ancora vedere se il sistema può autoeccitarsi, per il che occorre ancora esaminare il comportamento delle (10) nell'intorno del punto $\rho = 0$, $2\gamma = \pi/2$, $3\pi/2$. Ma se si scrivono le equazioni alle variazioni delle (10) nell'intorno di tale punto, si constata immediatamente che il punto considerato è instabile. Possiamo dunque concludere che la condizione (12) *è sufficiente ad assicurare il sorgere e lo stabilirsi*, in prima approssimazione, *del regime periodico descritto dalle* (11).

5. Vogliamo infine osservare che ad una equazione analoga alla (5) si sarebbe arrivati nello studio delle oscillazioni di un pendolo semplice di lunghezza variabile, mobile in un mezzo resistente con resistenza viscosa. L'equazione di moto di un tale sistema è infatti

$$\ddot{\psi} + \left(k + \frac{2\dot{l}}{l}\right)\dot{\psi} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\psi = 0 \tag{13}$$

e ove si ponga $l = l_0\,(l + \lambda\cos\Omega t)$, $\psi = \psi_0\varphi$ con $0 < \psi_0 \ll 1$, e si sviluppi in serie il sen ψ, si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0}\varphi &= -\,[k - 2\lambda\Omega\,\mathrm{sen}\,\Omega t]\dot{\varphi} + \\ &+ \frac{g}{6l_0}\psi_0^2\varphi^3 + \frac{g}{l_0}\lambda\cos\Omega t\left[\varphi - \frac{1}{6}\psi_0^2\varphi^3\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Se ora si suppone k dell'ordine di λ così come ψ_0^2, e si pone $2\lambda = \mu$, $k = \mu r$, $\psi_0^2 = -3b\mu$ con $b < 0$, si arriva proprio ad una equazione formalmente identica alla (5), con la differenza che ora è $b < 0$. Si può facilmente constatare tuttavia che tale differenza non fa che spostare la fase della soluzione stazionaria tra $3\pi/4$ e π, senza alterare la condizione di autoscillazione e di stabilità.