Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Su di una questione relativa a somme uguali di potenze simili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 286–293.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_286_0>

Su di una questione relativa a somme uguali di potenze simili.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *È contenuto nella introduzione che segue.*

Indichiamo con $N(k)$, $\alpha(k)$, $M(n, r)$ il più piccolo valore di p per cui si ha rispettivamente:

a) $$a^s_1 + \ldots + a^s_p = b^s_1 + \ldots + b^s_p; \quad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

b) $$a^s_1 + \ldots + a^s_p = b^s_1 + \ldots + b^s_p \quad (s = 2, 4, \ldots, k \text{ se } k \text{ è pari}, \; s = 1, 3, \ldots, k \text{ se } k \text{ è dispari});$$

c) $$a^s_1 + \ldots + a^s_p = b^s_1 + \ldots + b^s_p \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n;\; n + 2, n + 4, \ldots, n + 2r)$$

non essendo le b_i una permutazione delle a_i ed avendosi

$$(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = 1.$$

Scopo di questo Lavoro è di determinare dei limiti superiori, i più piccoli che ci è stato possibile, di $M(n, r)$, per alcuni valori di n ed r.

1. Innanzi tutto se $n = 0$, $n = 1$ si ha rispettivamente

$$M(0, r) = \alpha(2r),$$
$$M(1, r) = \alpha(2r + 1).$$

I valori di $\alpha(k)$ si desumono da numerosi Lavori precedenti [1].

Per il caso $r = 1$ si può utilizzare un teorema dovuto a GOORMAGHTIGH [2] con il quale si passa, qualunque sia n, da una multigrada del tipo

(1) $$a^s_1 + \ldots + a^s_p = b^s_1 + \ldots + b^s_p, \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

(1) Cfr. ad es. per notizie ed indicazioni bibliografiche G. PALAMÀ, *Saggio di una nuova trattazione delle multigrade*, « Boll. della Un. Mat. Ital. », 3, Anno III, (Dic. 1948), Fasc. 3, pp. 263-278.

(2) « Sphinx-Oedipe », (1939), pp. 54-55.

(purchè non sia *simmetrica*, purchè cioè non si abbia

$a_1 + a_p = a_2 + a_{p-1} = \ldots = b_1 + b_p = b_2 + b_{p-1} = \ldots =$ costante se n è dispari;

$$a_1 + b_p = a_2 + b_{p-1} = \ldots = a_p + b_1 = \text{Costante se } n \text{ è pari}),$$

ad un' altra del tipo

$$\alpha^s{}_1 + \ldots + \alpha^s{}_p = \beta^s{}_1 + \ldots + \beta^s{}_p$$
$$(s = 1,\ 2, \ldots,\ n,\ n+2).$$

Però, mentre si conoscono multigrade simmetriche di ordine n, per $n < 10$, normali, per le quali si ha cioè $N(n) = n + 1$ (non può essere, come è noto, $N(n) \leq n$ e d'altra parte normali d'ordine $n \geq 10$ non si conoscono sebbene se ne sia congetturata l'esistenza), non se ne son trovate ancora non simmetriche che per $n \leq 5$, e poichè qui ci occupiamo dei casi $n > 1$, $r > 1$, limitandoci ad osservare per il caso $r = 1$ soltanto che, dai risultati noti e dal teor. di Goormaghtigh si ha $M(n, 1) = n + 1$, per $n \leq 5$, rimane aperto il problema di trovare dei limiti superiori di $M(n, 1)$, i più piccoli possibili, per $n > 5$.

2. Per quel che segue occorre ricordare:

a) Da una multigrada del tipo della (1) ma simmetrica si può trarre un' altra della forma (3)

$$A^s{}_1 + \ldots + A^s{}_m = B^s{}_1 + \ldots + B^s{}_q,$$
$$s = 1,\ 3, \ldots,\ n-1, \text{ se } n \text{ è pari},$$

con $m + q = 2\,p$;

e

$$s = 2,\ 4, \ldots,\ n-1, \text{ se } n \text{ è dispari},$$

con $m = q = p/2$;

b) Il Teor. di Tarry (4) secondo cui da una multigrada del tipo

$$a_1, \ldots,\ a_p \overset{s}{=} b_1, \ldots,\ b_p,\ (s = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

si passa ad un' altra della forma

$$a_1, \ldots,\ a_p,\ b_1 + h, \ldots,\ b_p + h \overset{s}{=} b_1, \ldots,\ b_p,\ a_1 + h, \ldots,\ a_p + h, \tag{2}$$
$$(s = 1, \ldots,\ n + 1)$$

con h qualsiasi;

(3) Cfr. l. c. in (1)

(4) « L'Inter. des Math. », 19, (1912), pp. 219-221.

c) Se è [5]

$$C_1, \ldots, C_p \overset{s}{=} D_1, \ldots, D_p, \quad (s = 2, 4, \ldots, 2k), \tag{3}$$

è anche qualunque sia l

$$\begin{gathered} C_1 - l, \ldots, C_p - l, \; D_1 + l, \ldots, D_p + l \overset{s}{=} D_1 - l, \ldots, D_p - l, \; C_1 + l, \ldots, C_p + l; \\ (s = 1, 3, 5, \ldots, 2k + 1) \end{gathered} \tag{4}$$

ed analogamente dalla (3), se vale per

$$s = 1, 3, \ldots, 2k - 1,$$

si passa alla (4) che sussiste invece per

$$s = 2, 4, \ldots, 2k.$$

3. La ricerca che ci interessa è facilitata dal seguente fondamentale teorema.

TEOREMA. - *Se è*

$$\begin{gathered} a^s{}_1 + \ldots + a^s{}_p = b^s{}_1 + \ldots + b^s{}_p \\ (s = 1, 2, \ldots, n;\; n + 2, n + 4, \ldots, n + 2r), \end{gathered} \tag{5}$$

si ha anche

$$\begin{gathered} a_1 - l, \ldots, a_p - l, \; b_1 + l, \ldots, b_p + l \overset{s}{=} b_1 - l, \ldots, b_p - l, \; a_1 + l, \ldots, a_p + l \\ (s = 1, 2, \ldots, n + 1;\; n + 3, n + 5, \ldots, n + 2r + 1) \end{gathered} \tag{6}$$

qualunque sia l.

Difatti, poichè la (5) vale per $s = 1, 2, \ldots, n$, si ha ovviamente anche per qualsiasi l

$$\begin{gathered} a_1 - l, \ldots, a_p - l \overset{s}{=} b_1 - l, \ldots, b_p - l, \\ (s = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}$$

dalla quale, applicandovi la (2) per $h = 2l$, si desume che la (6) sussiste per i valori $1, 2, \ldots, n + 1$ di s. Inoltre, la dimostrazione che la (6) vale anche per i valori $n + 3, n + 5, \ldots, n + 2r + 1$ di s, segue dal teorema *c*) del N. 2 quando si tenga presente che tra

[5] Cfr. G. PALAMÀ, *Un teorema analogo a quello di Tarry-Osservazioni su altri noti-Applicazioni*, Atti del Seminario matem. e fisico della Univ. di Modena, 2, (1947-48).

i valori di s per cui vale la (5) ci sono i numeri

$$1, 3, \dots, n + 2r \text{ se } n \text{ è dispari,}$$

e

$$2, 4, \dots, n + 2r \text{ se } n \text{ è pari.}$$

OSSERVAZIONE. - La scelta opportuna di l riduce nella (6) il numero dei suoi termini.

4. Applicazioni del teorema precedente utili alla ricerca di cui ci occupiamo sono ad es. le seguenti.

Dalla

$$-25,\ -16,\ 2,\ 21 \overset{s}{=} -23,\ -14,\ -5,\ 24, \quad (s = 1,\ 2\,;\ 4,\ 6) \tag{7}$$

successivamente si ha, con il teorema dimostrato, per $l = 9/2, 19, 29/2$

$$-59,\ -5,\ -1,\ 33,\ 57 \overset{s}{=} -55,\ -23,\ 13,\ 39,\ 51, \quad (s = 1,\ 2,\ 3\,;\ 5,\ 7) \tag{8}$$

$$-39,\ -18,\ -12,\ -10,\ -2,\ 19,\ 29,\ 35 \overset{s}{=} -37,\ -21,\ -20,\ -3,\ 9,\ 10,\ 26,\ 38, \quad (s = 1,\ 2,\ 3,\ 4\,;\ 6,\ 8) \tag{9}$$

$$-107,\ -65,\ -53,\ -45,\ -33,\ -13,\ 29,\ 41,\ 49,\ 81,\ 105 \overset{s}{=} -103,\ -71,\ -69,\ -35,\ -9,\ -7,\ 5,\ 25,\ 67,\ 87,\ 99. \quad (s = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\,;\ 7,\ 9) \tag{10}$$

Invece dalla

$$-32,\ -1,\ 28,\ 31,\ 55,\ 61,\ 68, \overset{s}{=} -20,\ -17,\ 23,\ 44,\ 49,\ 64,\ 67, \quad (s = 1,\ 2\,;\ 4,\ 6,\ 8,\ 10) \tag{11}$$

segue per $l = 3/2$

$$-67,\ -31,\ -5,\ 49,\ 53,\ 91,\ 101,\ 107,\ 119,\ 133,\ 137 \overset{s}{=} -61,\ -43,\ 1,\ 43,\ 65,\ 85,\ 95,\ 113,\ 125,\ 125,\ 139. \quad (s = 1,\ 2,\ 3;\ 5,\ 7,\ 9,\ 11) \tag{12}$$

5. OSSERVAZIONE I°. - Alcune delle identità del successivo N. 7 si sono ottenute, partendo da note multigrade valevoli per i valori

$1, 3, \ldots, 2k-1$ dell'esponente, trasportandovi dei termini opportuni da un membro all'altro ed, eventualmente, mediante l'inclusione in uno dei due membri di due termini opposti, in modo che la multigrada sussista anche per l'esponente 2.

Osservazione 2ª. - Se si volesse una limitazione superiore di $M(n, r)$, con n ed r qualsiasi, basterebbe servirsi di una multigrada simmetrica di ordine $2r+2$ (cui, se non ve ne fossero di note, si potrebbe sempre pervenirvi con la successiva opportuna applicazione del teorema di Tarry), cioè di una multigrada simmetrica del tipo

$$a_1, \ldots, a_p = b_1, \ldots, b_p,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, 2r+2)$$

con il p minimo possibile (questo p minimo dipende e dalla scelta della multigrada di partenza, scelta per la quale purtroppo non vi è alcun criterio, e dai valori di h nella successiva applicazione del teorema di Tarry) ed applicare poi ad essa il teorema a) del N. 2, si avrebbe così una multigrada valevole per i valori $1; 3, \ldots, 2r+1$ dell'esponente. L'applicazione a quest'ultima di successive $n-1$ volte della (6) ci darebbe assieme ad una multigrada del tipo della stessa (6) una limitazione superiore di $M(n, r)$.

6. Determiniamo delle limitazioni superiori di $M(n, r)$ per dei valori particolari di n ed r, $n > 1$, $r > 1$.

Sia $n = 2$.

a) $r = 2$.

Dalla (7) essendo, come è noto, $\alpha(6) = 4$, si ha

$$M(2, 2) = 4;$$

b) $r = 3$

Dalla

$$-20231, -12, 11881, 20885, 23738 \stackrel{s}{=} -20449, 436, 11857, 20667, 23750,$$
$$(s = 1, 2; 4, 6, 8)$$

si ha, essendo $\alpha(8) = 5$

$$M(2, 3) = 5;$$

c) $r = 4$

La (11) dà

$$M(2, 4) \leq 7;$$

d) $r = 5$

La

$$-3,\ 2,\ 2,\ 17,\ 17,\ 21,\ 21,\ 26,\ 29,\ 40,\ 40,\ 41,\ 43,\ 54,\ 55 \overset{s}{=}$$
$$-8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 15,\ 23,\ 30,\ 34,\ 37,\ 37,\ 38,\ 49,\ 51,\ 56,$$
$$(s = 1,\ 2;\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12)$$

ci fornisce

$$M(2,\ 5) \leq 15;$$

e) $r = 6$

Analogamente con la

$$-51,\ 1,\ 23,\ 41,\ 43,\ 65,\ 73,\ 93,\ 95,\ 99,\ 123,\ 123,\ 127,\ 149,\ 151 \overset{s}{=}$$
$$-47,\ 3,\ 5,\ 53,\ 57,\ 59,\ 61,\ 89,\ 103,\ 111,\ 111,\ 115,\ 139,\ 143,\ 153,$$
$$(s = 1,\ 2;\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14)$$

si ha

$$M(2,\ 6) \leq 15;$$

f) $r = 7$

A mezzo della

$$-25,\ 5,\ 37,\ 39,\ 49,\ 63,\ 67,\ 91,\ 97,\ 101,\ 111,\ 121,\ 121,\ 125,\ 125,\ 129,\ 149,$$
$$153,\ 163,\ 163,\ 167,\ 191,\ 195,\ 205 \overset{s}{=} -13,\ -11,\ 29,\ 51,\ 55,\ 61,\ 71,\ 75,$$
$$103,\ 109,\ 113,\ 113,\ 117,\ 117,\ 137,\ 141,\ 145,\ 145,\ 151\ 175,\ 175,\ 179,\ 201,\ 203,$$
$$(s = 1,\ 2;\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16)$$

si ricava

$$M(2,\ 7) \leq 24;$$

g) $r = 8$

L'identità

$$-77,\ 3,\ 11,\ 13,\ 21,\ 45,\ 45,\ 69,\ 69,\ 71,\ 73,\ 97,\ 103,\ 119,\ 127,\ 141,$$
$$143,\ 147,\ 155,\ 177,\ 185,\ 191,\ 211,\ 213,\ 215,\ 219,\ 243,\ 247,\ 257, \overset{s}{=}$$
$$-81,\ 5,\ 9,\ 23,\ 29,\ 35,\ 53,\ 57,\ 63,\ 65,\ 87,\ 93,\ 111,\ 121,\ 123,\ 131,$$
$$139,\ 157,\ 159,\ 169,\ 195,\ 197,\ 197,\ 203,\ 227,\ 227,\ 231,\ 253,\ 255$$
$$(s = 1,\ 2;\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18)$$

ci fornisce

$$M(2,\ 8) \leq 29.$$

Gli esempi precedenti ci fanno congetturare che molto probabilmente é

$$M(2,\ r) = \alpha(2r + 2).$$

7. $n = 3$.

a) $r = 2$.

Dalla (8) e dal fatto che $\alpha(7) = 5$, segue che

$$M(3,\ 2) = 5;$$

b) $r = 3$.

La

$$(13) \qquad -11,\ 1,\ 25,\ 55,\ 75,\ 87,\ 95 \overset{s}{=} -13,\ 7,\ 19,\ 61,\ 69,\ 91,\ 93,$$
$$(s = 1,\ 2,\ 3;\ 5,\ 7,\ 9)$$

ci dà

$$M(3,\ 3) \leq 7;$$

c) $r = 4$.

Dalla (12) segue

$$M(3,\ 4) \leq 11;$$

d) $r = 5$.

La

$$-60,\ -10,\ -10,\ 10,\ 15,\ 15,\ 16,\ 19,\ 27,\ 38,\ 40,\ 41,\ 48,\ 50,\ 61,\ 64,\ 69 \overset{s}{=}$$
$$-62,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 31,\ 31,\ 32,\ 34,\ 45,\ 46,\ 54,\ 59,\ 67,\ 68,$$
$$(s = 1,\ 2,\ 3;\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13)$$

dà

$$M(3,\ 5) \leq 17;$$

e) $r = 6$.

La

$$-18,\ -10,\ 8,\ 9,\ 10,\ 10,\ 15,\ 35,\ 36,\ 37,\ 41,\ 42,\ 49,\ 51,\ 63,$$
$$68,\ 68,\ 70,\ 82,\ 84,\ 89 \overset{s}{=} -20,\ 1,\ 12,\ 16,\ 17,\ 32,$$
$$33,\ 38,\ 43,\ 45,\ 45,\ 59,\ 59,\ 60,\ 74,\ 74,\ 76,\ 87,\ 88,$$
$$(s = 1,\ 2,\ 3;\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15)$$

ci dà

$$M(3,\ 6) \leq 21;$$

f) $r = 7$.

Dalla

$$-86,\ -2,\ 13,\ 15,\ 20,\ 27,\ 29,\ 30,\ 42,\ 44,\ 44,\ 46,\ 48,\ 56,$$
$$58,\ 59,\ 61,\ 73,\ 75,\ 77,\ 77,\ 90,\ 91,\ 92,\ 94,\ 106,\ 108,\ 113 \overset{s}{=}$$
$$-62,\ -60,\ 5,\ 9,\ 14,\ 16,\ 21,\ 36,\ 38,\ 38,\ 40,\ 45,\ 50,\ 50,\ 52,$$
$$52,\ 54,\ 64,\ 67,\ 67,\ 69,\ 69,\ 81,\ 83,\ 83,\ 98,\ 98,\ 100,\ 111,\ 112,$$
$$(s = 1,\ 2,\ 3;\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)$$

si ha

$$M(3,\ 7) \leq 30.$$

8. $n = 4$.

a) $r = 2$.

La (9) dà

$$M(4,\ 2) \leq 8;$$

b) $r = 3$.

Applicando alla (13) il teorema del N. 3 per $l = 6$ si ha

$$-17,\ -7,\ 19,\ 25,\ 49,\ 67,\ 69,\ 75,\ 89,\ 97,\ 99 \overset{s}{=}$$
$$-19,\ 1,\ 7,\ 31,\ 55,\ 61,\ 63,\ 85,\ 87,\ 93,\ 101,$$
$$(s = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ 6,\ 8,\ 10)$$

e quindi

$$M(4,\ 3) \leq 11;$$

ecc.

9. $n = 5$.

Ci limitiamo a considerare il solo caso $r = 2$.

La (10) ci dà

$$M(5,\ 2) \leq 11.$$

10. Notiamo infine che in generale è

$$M(n,\ r) \geq N(n);$$

$$M(n,\ r) \geq \alpha(n + 2r).$$

Invece il teor. del N. 3 ci dà

$$M(n + 1,\ r) \leq 2M(n,\ r) - 1.$$