Bollettino Unione Matematica Italiana

Marco Cugiani

Sui punti esclusi dalle coperture dell'insieme razionale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 294–300.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_294_0>

Sui punti esclusi dalle coperture dell' insieme razionale.

Nota di Marco Cugiani (a Milano)

Sunto. - *Si studiano le condizioni perchè un punto assegnato, di ascissa irrazionale, non appartenga ad un plurintervallo, di misura abbastanza piccola, costituente una copertura dell' insieme razionale.*

I

Consideriamo l' insieme dei numeri razionali p/q $(0 \leq p/q \leq 1,$ $(p, q) = 1)$, che penseremo ordinati per altezza crescente, e per valore crescente quelli di uguale altezza, secondo la successione:

$$(1) \qquad \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \cdots$$

Indicheremo con $N = N(p/q)$ il posto occupato dal numero p/q nella (1).

Con un noto artificio possiamo ottenere una copertura dell' insieme anzidetto mediante un insieme aperto di misura piccola a piacere, nel modo seguente. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e pensiamo associato all' N-esimo punto razionale un intervallo aperto $I_N = I_N(p/q)$ di ampiezza $\varepsilon/2^{N-1}$, col centro in p/q. Consideriamo poi una successione di intervalli $Y_N = Y_N(p/q)$, così definiti:

$$Y_1\left(\frac{0}{1}\right) = I_1\left(\frac{0}{1}\right) \qquad \text{per } N = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &Y_N(p/q) = 0, \text{ se } p/q \text{ è interno a } \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \\ &Y_N = I_N - \left(I_N \cap \sum_{i=1}^{N-1} Y_i\right), \text{ se } p/q \text{ non appartiene a } \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \end{aligned}\right\} \text{ per } N > 1.$$

Il plurintervallo $\mathfrak{J}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$ contiene tutti i punti razionali e la sua misura è $< 2\varepsilon$.

Ora ci si può porre la seguente questione: « *fissato un numero* (*reale*) *irrazionale* α $(0 < \alpha < 1)$ *è possibile trovare in conseguenza un* $\varepsilon_0 > 0$ *tale che il punto* α *non appartenga ad alcun plurintervallo* $\mathfrak{J}(\varepsilon)$ *per* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$? » [1].

[1] Questo problema ci è stato proposto dal Prof. W. R. Transue (Kenyon College, Gambier, Ohio, USA), e non ci risulta che esso sia stato finora trattato.

Una prima risposta a tale questione è fornita dalla seguente proposizione:

A) *Se α è algebrico (irrazionale) è sempre possibile trovare un $\varepsilon_0 > 0$, dipendente da α, che soddisfa alla condizione posta.*

Sia, più in generale. α un irrazionale qualunque; allora, se indichiamo con p_n/q_n la ridotta di ordine n dello sviluppo di α in frazione continua regolare, e poniamo per brevità $N(p_n/q_n) = N(n)$, possiamo stabilire due interessanti criteri espressi dalle seguenti proposizioni (che verranno dimostrate rispettivamente al punto II e III):

B) *Condizione sufficiente perchè esista un $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha) > 0$, tale che il punto α non appartenga ad alcun $\mathfrak{I}(\varepsilon)$ per $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, è che si abbia:*

(2) $$q_n \cdot q_{n+2} = O(2^{N(n)}) \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

C) *Condizione sufficiente perchè α risulti interno ad ogni $\mathfrak{I}(\varepsilon)$, qualunque sia $\varepsilon > 0$, è che si abbia:*

(3) $$2^{N(n)} = o(q_n \cdot q_{n+1}) \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Facciamo notare subito che la *A*) rientra nella *B*) come caso particolare, poichè per gli irrazionali algebrici è soddisfatta la (2); osserviamo anzi che la classe dei numeri α, per cui la (2) è soddisfatta, è ben più estesa. Riferendoci ad esempio alla nota classificazione di MAHLER [2] possiamo affermare che la (2) è soddisfatta, oltre che per i numeri *A* (algebrici), anche per i numeri trascendenti *S* e *T*, nonchè per i numeri *U* con $\mu > 1$.

Tutti questi numeri, che chiameremo complessivamente numeri *V*, soddisfano infatti, a una relazione del tipo:

(4) $$|pq^{-1} - \alpha| > cq^{-k}$$

per ogni coppia di interi p, q, con c e k costanti positive opportune, dipendenti da α. Ora si ha:

$$N(p/q) \geq q\,; \quad 2^{N(n)} \geq 2^{q_n}; \quad (q_n q_{n+1})^{-1} > |p_n q_n^{-1} - \alpha| > c q_n^{-k};$$
$$q_{n+1} < c^{-1} q_n^{k-1};\; q_{n+2} < c^{-2} q_n^{2k-2};\; q_n q_{n+2} < c^{-2} q_n^{2k-1} = o(2^{q_n}) = o(2^{N(n)}).$$

Per cose note [3] è chiaro intanto che «quasi tutti» i numeri reali sono numeri *V* e pertanto *il nostro problema ammette una risposta positiva per quasi tutti i numeri reali* α. Vedremo anzi

[2] Vedi: K. MAHLER, *Zur Approximation der Exponential-function und des Logarithmus*, «Jour. reine ang. Math.», *166*, (1932), pp. 118-136; 137-150. Vedi anche J. F. KOKSMA, *Diophantische Approximationen*, «Ergebnisse d. Math.», *4*, Heft 4, pp. 62-63.

[3] Vedi: K. MAHLER, *Ueber das Mass der Menge aller S-Zahlen*, «Mat. Ann.», *106*, (1932), pp. 131-139.

(al punto II, oss.[ne] 2[a]) che la (2) è soddisfatta ad esempio anche per una certa sottoclasse di numeri di LIOUVILLE (e quindi numeri U con $\mu = 1$, secondo la classificazione suaccennata); *esiste per contro una sottoclasse piuttosto ampia (avente la potenza del continuo) di numeri di Liouville per cui è soddisfatta la* (3) *e tali quindi che i punti ad essi corrispondenti risultano interni al plurintervallo* $\mathfrak{J}(\varepsilon)$ *qualunque sia* $\varepsilon > 0$ (vedi al punto III, oss[ne]).

La questione ora prospettata si presta ad ovvie generalizzazioni, qualora si pensi l'insieme dei numeri razionali ordinato in una successione diversa dalla (1), o si pensi diversa da quella sopra indicata la legge di formazione del plurintervallo $\mathfrak{J}(\varepsilon)$. Qui ci limiteremo a qualche considerazione relativa alla questione cui dà luogo l'adozione di un diverso ordinamento, in cui al numero p/q corrisponda un posto N', generalmente diverso da N, ferma però restando la legge che, in base al nuovo ordinamento, conduce alla costruzione degli intervalli $I'_{N'}$ e del plurintervallo $\mathfrak{J}'(\varepsilon)$.

A questo proposito faremo rilevare l'esistenza di una estesa classe di ordinamenti rispetto a cui non muta il comportamento dei numeri V, nè quello dei numeri di LIOUVILLE appartenenti alle due sottoclassi sopra accennate (vedi le oss.[ni] ai punti II e III); valgono però le proposizioni seguenti:

D) *Fissato* α *irrazionale, è sempre possibile trovare un ordinamento (anzi infiniti) tale che il punto* α *non appartenga al plurintervallo* $\mathfrak{J}'(\varepsilon)$, *costruito in corrispondenza a tale ordinamento, tutte le volte che* $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\varepsilon_0 > 0$, dipendente da α e dall'ordinamento).

E) *Fissato* α *è sempre possibile trovare un ordinamento (anzi infiniti) tale che, per ogni* $\varepsilon > 0$, *il punto* α *risulti interno al plurintervallo* $\mathfrak{J}'(\varepsilon)$, *costruito in corrispondenza a tale ordinamento.*

II

Facciamo qui alcune semplici considerazioni di carattere generale che, oltre ad essere interessanti di per sè, ci saranno di aiuto nel seguito.

a) Fissato $\varepsilon > 0$, accadrà che, per N abbastanza grande, α risulti esterno ad ogni $I_N(p/q)$, se p/q non è una ridotta dello sviluppo di α in frazione continua.

Si ha infatti:

$$|pq^{-1} - \alpha| > 2^{-1}q^{-2} > \varepsilon \cdot 2^{-q} > \varepsilon \cdot 2^{-N} \quad \text{per} \quad N \geq N_0 .$$

Anzi, essendo $q^2 = o(2^q)$ per $q \to \infty$, si ha:

b) Fissato $\varepsilon > 0$, detta $\delta(N)$ la distanza di α da $I_N(p/q)$, e posto $|pq^{-1} - \alpha| = \lambda(N)$, risulta

$$\delta(N) \backsim \lambda(N),$$

se $N \to \infty$ lungo la successione dei posti dei numeri p/q che non sono ridotte di α.

c) Fissato $\varepsilon > 0$, sia ancora $N(p/q)$ il posto di una non ridotta di α e sia $N(n)$ il posto di una ridotta p_n/q_n tale che $N(n) > N(p/q)$. Se vale la relazione:

$$(5) \qquad q_n = o(q_{n+1}) \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

risulterà sempre, per q abbastanza grande, il punto p_n/q_n esterno all'intervallo $I_N(p/q)$.

Infatti (per p/q diverso da ogni ridotta; $N(p/q) < N(n)$) si ha:

$$q < 2q_n\,; \quad \lambda(N(p/q)) > 2^{-1}q^{-2}$$

$$|p_n q_n^{-1} - \alpha| = \lambda(N(n)) < (q_n q_{n+1})^{-1} = o(q_n^{-2}) =$$
$$= o(q^{-2}) = o(\lambda(N(p/q))) = o(\delta(N(p/q)))$$

per $N(p/q) \to \infty$ e quindi per $q \to \infty$.

d) Fissato N si può scegliere $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\alpha, N)$ così piccolo che α risulti esterno a ciascuno degli intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_N$, per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

e) Detta $H(p/q)$ l'altezza del numero p/q ($H = p + q$; $q \leq H \leq 2q$), valgono le limitazioni ($\gamma > 0$, costante opportuna):

$$\gamma q^2 \leq \gamma H^2 < N < \frac{1}{4} H^2 \leq q^2$$

per N abbastanza grande.

Si ha infatti:

$$2 + \sum_{n=3}^{H-1} \frac{1}{2} \varphi(n) < N \leq 2 + \sum_{n=3}^{H} \frac{1}{2} \varphi(n)$$

e d'altra parte è notoriamente:

$$\sum_{n=1}^{x} \varphi(n) \sim \frac{3}{\pi^2} x^2, \quad \text{per} \quad x \to \infty.$$

Ciò premesso passiamo a dimostrare la *B*).

Per la (2) vale la relazione (p_n/q_n è la ridotta di ordine n) per ogni n:

$$|p_n q_n^{-1} - \alpha| > (q_n q_{n+2})^{-1} > \eta \cdot 2^{-N(n)} \quad (\eta > 0, \text{ opportuno})$$

Fissato allora $\varepsilon = \eta$ esiste per la *a*) un N_0 tale che, per $N \geq N_0$, α è esterno a tutti gli $I_N(p/q)$ (p/q diverso da ogni ridotta). Si può scegliere allora, per la *d*), ε_1 in modo che α risulti esterno a ciascuno degli intervalli I_i per $1 \leq i \leq N_0$. Basterà quindi porre $\varepsilon_0 = \mathrm{Min}\,(\varepsilon_1, \eta)$ perchè le condizioni del problema siano soddisfatte; la *B*) è così dimostrata.

OSSERVAZIONE 1ª. - Se noi pensiamo di ordinare i numeri razionali secondo una successione diversa dalla (1), in modo che al numero p/q competa un nuovo posto N', è chiaro che il ragionamento precedente si applicherà ancora se vale una relazione analoga alla (2): $q_n q_{n+2} = O(2^{N'(n)})$, ed inoltre la relazione: $q^2 = o(2^{N'})$, in modo che si possa invocare ancora la a). Se limitiamo le nostre considerazioni ai numeri V (che costituiscono già, come abbiamo notato, un insieme di misura 1 sull'intervallo $(0, 1)$), si ha per la (4):

$$q_n q_{n+2} = o\left(2^{\sigma(\log q_n)^{1+\eta}}\right) = o\left(2^{\sigma(\log N(n))^{1+\eta}}\right) \tag{6}$$

(σ, η costanti positive) e per la e):

$$q^2 = o\left(2^{\sigma(\log \gamma q^2)^{1+\eta}}\right) = o\left(2^{\sigma(\log N)^{1+\eta}}\right).$$

Possiamo perciò affermare che la nostra questione ammette una risposta positiva per tutti i numeri V e per ogni ordinamento tale che esistano due costanti positive, σ ed η, in guisa che ogni N' ed il corrispondente N soddisfino alla relazione:

$$N' > \sigma(\log N)^{1+\eta} \tag{7}$$

(ε_0 dipenderà dall'ordinamento oltre che da α).

OSSERVAZIONE 2ª. - Consideriamo quei numeri di LIOUVILLE che ammettono uno sviluppo in frazione continua del tipo: $\alpha = [0, a, a^{2!}, a^{3!}, \ldots]$ con a intero ≥ 2. Si vede facilmente che $a^{n!} \leq q_n < a^{2 \cdot n!}$, e quindi per questi numeri, come per i V, non solo vale la (2), ma anche la (6), e perciò anche per essi il nostro problema ammette una risposta positiva, per tutti quegli ordinamenti, per i quali risulta soddisfatta la (7).

III

Passiamo ora a dimostrare la C):

Se p_n/q_n è la ridotta di α d'ordine n, si ha, per la (3):

$$|p_n q_n^{-1} - \alpha| < (q_n q_{n+1})^{-1} < \varepsilon \cdot 2^{-N(n)} \tag{8}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e per $n \geq \nu$, $\nu = \nu(\alpha, \varepsilon)$.

Quindi α è interno a ogni $I_{N(n)}$, per $n \geq \nu$.

Per dimostrare che esso è interno ad un Y_N partiamo dall'osservazione che α non può essere estremo comune di due I_N adiacenti (la distanza fra i centri dei due I_N sarebbe irrazionale), perciò fissato N_0 accadrà che: o α è interno ad un Y_N con $N \leq N_0$, oppure appartiene (eventualmente come estremo) ad un intervallo $\Delta(N_0)$, di misura positiva, in cui non cade alcun punto degli Y_N per $N \leq N_0$.

Poichè la (3) implica la (5), vale la c); accadrà quindi che, per $q \geq q^*$, ogni ridotta p_n/q_n, che venga dopo la non ridotta p/q nell'ordinamento (1), risulti esterna all'intervallo $I_N(p/q)$. Poniamo allora $H^* = 2q^*$ e sia $\nu + m$ l'ordine della prima ridotta di altezza $> H^*$ (e sia $m = 0$, se $p_\nu + q_\nu$ è già $> H^*$).

Scelto adesso $N_0 = N(\nu + m)$, se α è interno ad un Y_N con $N \leq N_0$, allora α risulta interno ad $\mathfrak{J}(\varepsilon)$. Se α non è interno ad alcun Y_N con $N \leq N_0$ consideriamo il relativo intervallo $\Delta(N_0)$. Sia p_μ/q_μ la prima ridotta di α che appartiene a $\Delta(N_0)$. Tale ridotta non appartiene ad alcun Y_N con $N \leq N_0$ poichè appartiene a $\Delta(N_0)$, e non appartiene ad alcun Y_N con $N_0 < N(p/q) < N(\mu)$ in virtù della *c*), essendo certamente in questo caso $H(p/q) > H^*$, e quindi $q > q^*$. Pertanto p_μ/q_μ non appartiene ad alcun Y_N con $N < N(\mu)$, nè vi appartiene α (quest'ultima affermazione è ovvia per $N \leq N_0$; per $N_0 < N < N(\mu)$ si osservi che l'appartenenza di α ad un tale Y_N implicherebbe l'appartenenza allo stesso intervallo di ridotte d'ordine comunque elevato in contrasto colla *c*)). D'altra parte vale la (8), essendo $\mu > \nu$, quindi α appartiene ad $Y_{N(\mu)}$, e la *C*) è così dimostrata.

Osservazione. - Introduciamo il simbolo $a^{[n]}$, definito dalle relazioni:

$$a^{[1]} = a\,;\; a^{[n+1]} = a^{a^{[n]}} \quad (a > 0,\ n \text{ intero} > 0).$$

Sia ora $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ una successione non decrescente di interi $(h_1 \geq 2)$ ed α un numero definito da uno sviluppo in frazione continua del tipo:

$$\alpha = [a_0,\, a_1, \dots,\, a_\rho,\, h_1^{[\rho+2]},\, h_2^{[\rho+4]}, \dots,\, h_n^{[\rho+2n]}, \dots] \tag{9}$$

per ρ intero ≥ 0; $a_0 = 0$, a_i intero con $0 < a_i \leq h_1$ per $0 < i \leq \rho$. Si vede facilmente che $q_{\rho+n} < (h_n^{[\rho+2n]})^2$ e quindi, coll'aiuto della *e*), si verifica, con facile calcolo, che per tali numeri è soddisfatta la (3); essi risultano pertanto interni al plurintervallo $\mathfrak{J}(\varepsilon)$, qualunque sia $\varepsilon > 0$.

È chiaro poi che l'insieme dei numeri (9) gode delle seguenti proprietà: è ovunque denso sull'intervallo (0, 1); ha la potenza del continuo; è di misura nulla.

Facili considerazioni (analoghe a quelle svolte al punto II, oss.ne 1ª) conducono poi alla conclusione che i numeri (9) risultano ancora interni, per ogni $\varepsilon > 0$, a tutti quei plurintervalli $\mathfrak{J}'(\varepsilon)$, costruiti in corrispondenza ad ordinamenti tali che ogni N' ed il relativo N soddisfino ad una coppia di limitazioni:

$$\sigma(\log N)^{1+\eta} < N' < hN^k$$

con σ, η, h, k costanti positive.

IV

Dimostriamo adesso la *D*).

Sia $\alpha = [0,\, a_1,\, a_2, \dots,\, a_n, \dots]$ un assegnato numero irrazionale col suo sviluppo in frazione continua regolare. Poniamo $A_i =$

$= \operatorname{Max}(2, a_1, a_2, \ldots, a_i)$. Se p_n/q_n è la ridotta di ordine n avremo:

$$q_n \leq A_n^{2n}; \; q_n q_{n+2} < A_n^{2n} \cdot A_{n+2}^{2n+4} \leq A_{n+2}^{4n+4}.$$

Attribuiamo allora a ciascuna ridotta p_n/q_n il posto $N'(n) = A_{2n+2}^{4n+4}$. I rimanenti razionali li penseremo ordinati, nei posti rimasti liberi, al solito modo. Osserviamo che per questi ultimi si ha sempre $N \leq 4N' < 4N$.

Vale pertanto la relazione: $q_n q_{n+2} = O(2^{N'(n)})$, analoga alla (2), e la relazione: $q^2 = o(2^{N'})$ in modo che si applica ancora la a).

La D) è quindi dimostrata, per il particolare ordinamento prescelto, in base allo stesso ragionamento di cui ci siamo serviti (al punto II) per dimostrare la B), ed è chiaro altresì che il ragionamento stesso si applica ancora a ciascun ordinamento tale che tra il posto $N'(p/q)$, definito dalla legge precedente, ed il posto $N''(p/q)$, occupato dallo stesso numero p/q nel nuovo ordinamento considerato, sia soddisfatta la limitazione (per ogni coppia N', N''), analoga alla (7): $N'' > \sigma(\log N')^{1+\eta}$ (σ ed η positivi).

Dimostriamo infine la E). Fissato un numero irrazionale α, consideriamo anzitutto le ridotte il cui ordine è multiplo di 10. A ciascuna di esse attribuiamo il posto $N'(p_{10m}/q_{10m}) = 2m$. Invece a ciascuna delle ridotte di ordine $n \not\equiv 0 \pmod{10}$ attribuiamo il posto

$$N'(n) = 2A_{n+2}^{4n+4} + 1, \quad A_i = \operatorname{Max}(2, a_1, a_2, \ldots, a_i). \tag{10}$$

I rimanenti razionali li penseremo ordinati, nei posti rimasti liberi, al solito modo.

I punti interni all'intervallo $I'_{N'}(p_{10m}/q_{10m})$ sono quelli che distano da p_{10m}/q_{10m} per meno di $\varepsilon \cdot 2^{-N'(10m)} = \varepsilon \cdot 2^{-2m}$. D'altra parte si ha $|p_{10m} q_{10m}^{-1} - \alpha| < q_{10m}^{-2}$ e, fissato ε, sarà per $m \geq m_0$, $m_0 = m_0(\alpha, \varepsilon)$:

$$\varepsilon \cdot 2^{-2m} > q_{10m}^{-2} \quad \text{(si osservi che } q_{10m} > 2^{5m}\text{)}.$$

Quindi α è interno a tutti gli $I'_{N'(10m)}$ per $m \geq m_0$. Per dimostrare che esso è interno ad un $Y'_{N'}$, si procede come al punto III, dopo aver verificato che ogni numero p_{10m}/q_{10m} risulta esterno ad ogni intervallo $Y'_{N'}$ per N' abbastanza grande, se sono soddisfatte le condizioni:

$$N' < N'(10\,m); \quad N' \neq N'(n) \quad \text{per} \quad n \equiv 0 (\text{mod } 10)$$

Tale verifica è immediata (si ricordi in particolare la (10) per quanto riguarda gli $N' = N'(n)$ con $n \not\equiv 0 (\text{mod } 10)$); il noto ragionamento ci porta allora a concludere con la validità della E) per il prescelto ordinamento. È chiaro poi che le stesse argomentazioni si applicano ad infiniti altri ordinamenti; basterebbe ad esempio prendere in considerazione le ridotte il cui ordine è multiplo, anzichè di 10, di un intero $a > 10$.