Bollettino
Unione Matematica Italiana

C. Sabbioni

Sopra un esempio di funzione quasi periodica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 301–303.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_301_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sopra un esempio di funzione quasi periodica.

Nota di C. Sabbioni (a Pavia).

Sunto. - S. Cinquini *ha avuto occasione di rilevare* [1] *un esempio di funzione* f(x), *quasi periodica (secondo* Bohr*), assolutamente continua su ogni intervallo finito, la cui derivata del primo ordine* f'(x) *non è quasi periodica secondo* Stepanoff*; a tale conclusione* S. Cinquini *é giunto rilevando che* f'(x) *non è uniformemente integrabile* [2].

Nelle presenti righe vogliamo indicare un esempio di funzione quasi periodica (secondo Bohr*) e assolutamente continua, la cui derivata del primo ordine, pur essendo uniformemente integrabile, non è quasi periodica secondo* Stepanoff.

1. In corrispondenza ad ogni intero positivo n consideriamo la successione di intervalli:

$$(1)\qquad I_{n,\,r} \equiv (2^n + 2^{n+1}\cdot r - 1,\ 2^n + 2^{n+1}\cdot r + 1) \text{ con } r = 0, \pm 1, + 2, \ldots$$

Gli intervalli $I_{n,\,r}$, $(n = 1, 2, \ldots;\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sono a due a due distinti. Infatti non può essere

$$(2)\qquad 2^n + 2^{n+1}\cdot r = 2^{n_0} + 2^{n_0+1}\cdot r_0, \text{ con } n_0 \text{ intero e } \neq n,$$

perchè supposto, per fissare le idee, $n > n_0$, dalla (2) segue:

$$2^{n-n_0} + 2^{n-n_0+1}\cdot r = 1 + 2r_0 .$$

ove il primo membro è pari e il secondo membro dispari; e ciò è assurdo. Dunque necessariamente $n = n_0$; dalla (2) si ottiene:

$$1 + 2r = 1 + 2r_0, \text{ da cui } r = r_0 .$$

Inoltre gli intervalli $I_{n,\,r}$, $(n = 1, 2, \ldots;\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ricoprono tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ ad eccezione dell'intervallo $(-1, 1)$; i centri degli intervalli $I_{n,\,r}$ sono infatti i punti di ascissa:

$$2^n + 2^{n+1}\cdot r,$$

vale a dire tutti i punti di ascissa pari, ad eccezione dell'origine, non potendo essere:

$$2^n + 2^{n+1}\cdot r = 0$$

per valori interi di n ed r.

[1] S. Cinquini: *Sopra il problema dell'approssimazione delle funzioni quasi periodiche*, « Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa », Vol. V. 1951, pag. 245-267, in particolare pag. 264.

[2] Per le generalità sopra le funzioni quasi periodiche vedi, per esempio: S. Cinquini, *Funzioni quasi periodiche*, (Lit. Tacchi, Pisa, 1948-49).

In corrispondenza ad ogni intervallo $I_{n,\,r}(r=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ consideriamo nel semipiano $y \geq 0$ n triangoli isosceli, ognuno dei quali ha base $\frac{2}{n}$ e altezza $\frac{2n-1}{n^2}$. Sia ora $f_n(x)$ una funzione, il cui valore, per ogni x appartenente agli intervalli $I_{n,\,r}(r=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ sia dato dall'ordinata della poligonale sopra considerata; sia inoltre $f_n(x)=0$ per ogni altro x dell'intervallo $(-\infty,\ +\infty)$.

La funzione $f_n(x)$ è continua e periodica di periodo 2^{n+1}; inoltre si ha, per ogni x di $I_{n,\,r}(r=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2n-1}{n^2}$$

e per quasi tutti gli x di $I_{n,\,r}(r=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$:

$$(3) \qquad |f'_n(x)| = \frac{2n-1}{n^2} : \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Essendo gli intervalli $I_{n,\,r}$ a due a due distinti, per ogni x di $(-\infty,\ +\infty)$ al più una sola $f_n(x)$ è $\neq 0$.

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in tutto l'intervallo $(-\infty,\ +\infty)$ verso una funzione $F(x)$. Infatti, per ogni x, il resto $R_n(x)$, se non è nullo, è uguale al valore di una delle funzioni $f_n(x)$, ed essendo:

$$f_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n},$$

preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, e scelto un intero n' in modo che sia $\frac{2}{n'} \leq \varepsilon$, per ogni $n > n'$ risulta:

$$|R_n(x)| < \varepsilon.$$

La funzione $F(x)$ risulta pertanto quasi periodica secondo BOHR.

2. *a*) Per la (3) e per quanto abbiamo successivamente rilevato si ha, per quasi tutti gli x interni agli intervalli $I_{n,r}(r=0,\ +1,\ +2,\ldots)$

$$(4) \qquad |F'(x)| = |f'_n(x)| = 2 - \frac{1}{n},$$

mentre per ogni x dell'intervallo $(-1,\ 1)$ è:

$$F(x) = F'(x) = 0.$$

b) Dunque la derivata $F'(x)$ esiste finita e limitata in quasi tutto $(-\infty,\ +\infty)$, e quindi in tale intervallo $F(x)$ è assolutamente continua. Inoltre $F'(x)$, essendo limitata, risulta uniformemente integrabile in $(-\infty,\ +\infty)$.

Vogliamo dimostrare che la derivata $F'(x)$ non è quasi periodica S (³). A tal uopo basta rilevare che, preso ad arbitrio un numero positivo $\varepsilon < 1$, comunque si scelga un $l > 0$, esiste almeno un α reale, per il quale ci sono intervalli di ampiezza l tali che, per qualsiasi τ in essi contenuto, non ha luogo la disuguaglianza:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} |F'(x+\tau) - F'(x)|\, dx \leq \varepsilon; \tag{5}$$

più precisamente, posto $\alpha = -\frac{1}{2}$, rileviamo che per $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ si ha:

$$-\frac{1}{2} + \tau \leq x + \tau \leq \frac{1}{2} + \tau.$$

Ora, qualunque sia il numero reale positivo l, se si considera un qualsiasi intervallo di ampiezza l appartenente o alla semiretta $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, o alla $\left(+\frac{3}{2}, +\infty\right)$, detta τ l'ascissa di un qualsiasi punto interno a tale intervallo, al variare di x in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $x+\tau$ non è mai interno all'intervallo $(-1, 1)$. D'altra parte l'intervallo $\left(-\frac{1}{2}+\tau, \frac{1}{2}+\tau\right)$ avendo ampiezza unitaria, ha punti a comune al più con due $I_{n,r}$ consecutivi. Detti n', n'' i primi indici di questi due intervalli (con $n' < n''$), e dette $\mathcal{J}_{n'}$ e $\mathcal{J}_{n''}$ le ampiezze degli intervalli che $I_{n',r}$ ed $I_{n'',r}$ hanno a comune con l'intervallo $\left(-\frac{1}{2}+\tau, \frac{1}{2}+\tau\right)$ si ha:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |F'(x+\tau) - F'(x)|\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |F'(x+\tau)|\, dx =$$

$$= \int_{\mathcal{J}_{n'}} |F'(x+\tau)|\, dx + \int_{\mathcal{J}_{n''}} |F'(x+\tau)|\, dx =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{n'}\right) \cdot \mathcal{J}_{n'} + \left(2 - \frac{1}{n''}\right) \cdot \mathcal{J}_{n''} \geq \left(2 - \frac{1}{n'}\right) \cdot (\mathcal{J}_{n'} + \mathcal{J}_{n''}) = 2 - \frac{1}{n'} \leq 1$$

Pertanto la derivata $F'(x)$ della funzione $F(x)$, quasi periodica secondo BOHR e assolutamente continua su ogni intervallo finito, non è quasi periodica S.

(³) Per indicare una funzione quasi periodica secondo STEPANOFF usiamo, per brevità, la notazione: « *quasi periodica S* ».